

Lenkstabilität und Lenkwilligkeit von Einspurfahrzeugen unter dem Einfluß ihrer Baugrößen

Engels, Hans Reiner

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 12, 1960,
S.158-212



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Lenkstabilität und Lenkwilligkeit von Einspurfahrzeugen unter dem Einfluß ihrer Baugrößen

Von Hans Reiner Engels

Vorgelegt von P. Koeßler

Eingereicht am 6. 1. 1960

Summary: The theory of steering and stability of a single-track vehicle is set up, calculation possibilities are given. The mechanical proceeds of stabilization of the vehicle are explained by means of equations developed. The usefulness of these equations of motion is demonstrated by exact driving tests. Accordingly the steering angle, angle of lean of motor cycle and the possibility of steering wobble, which can be influenced especially by the moment of inertia of the front wheel system, are to be considered as the decisive characteristics for good driving performance. By means of two examples calculated on electronic computers the influence of the structural dimensions is determined.

Übersicht: Die Theorie des Fahrverhaltens eines Einspurfahrzeuges wird aufgestellt, Berechnungsmöglichkeiten werden aufgezeigt. An Hand der entwickelten Gleichungen werden die mechanischen Vorgänge bei der Stabilisierung des Fahrzeuges erklärt. Durch eingehende Fahrversuche wird die Brauchbarkeit dieser Bewegungsgleichungen nachgewiesen. Als entscheidende Kriterien für gutes Fahrverhalten sind hiernach Steuereinschlag, Seitenneigung und die Möglichkeit des Lenkungsflatterns die vornehmlich durch die Trägheitsverhältnisse des Vorderradsystems beeinflußt werden können, anzusehen. Der Einfluß der Baugrößen wird an zwei Beispielen rechnerisch mit Hilfe von elektronischen Rechenmaschinen ermittelt.

0.000 Einleitung

Das Fahrverhalten von Einspurfahrzeugen kann durch geeignete Wahl der Baugrößen beeinflußt und verbessert werden. Bisher waren „Fahrzeugeigenschaften“ oder „Fahrverhalten“ recht komplexe Begriffe, für die jede objektive Bewertung fehlte. Die Frage, ob ein Kraffrad sicher oder vorsichtig, mühelos oder ermüdend mit einer bestimmten Geschwindigkeit über einen bestimmten Kurs zu fahren ist, blieb dem Gefühl und dem Urteil des Versuchsfahrers überlassen. Hierbei sind erhebliche Streuungen und sogar widersprechende Ansichten keine Seltenheit. Geändert wurden bei solchen Versuchen rein empirisch meist nur Nachlauf und Steuerwinkel, aber es erhebt sich der Verdacht, daß anderen Grundgrößen mindestens gleiche Bedeutung zugesprochen werden muß.

Motor und Kraftübertragung, Federungseigenschaften und Bremsen — Punkte, die bei der Beurteilung einer Maschine ebenfalls von großer Bedeutung sind — sollen hier nicht untersucht werden, sondern die konstruktiven Möglichkeiten, die Grundabmessungen des Fahrgestells so zu verändern, daß die Fahrsicherheit erhöht und der Fahrer bei der Lenkung des Fahrzeugs weitgehend entlastet wird.

Unter diesem Blickwinkel soll unter Fahrverhalten folgendes verstanden werden:

- a) Die Stabilisierung der aufrechten Lage soll das Fahrzeug selbst übernehmen.
- b) Eine unbeabsichtigte Störung des Bewegungsablaufes soll durch möglichst kleine Ausschlagwinkel der Lenkung und des Hinterradsystems und möglichst ohne Schwingungen ausgeglichen werden.
- c) Die Lenkkräfte sollen in einem mittleren Bereich liegen.
- d) Eine gewünschte Änderung der Fahrtrichtung soll vom Fahrzeug bereitwillig ausgeführt werden.
- e) Das Einfedern der Räder, Fahrzeugschwingungen, Motor und Raddrehzahlen sowie die Eigenschaften des Reifens sollen das Fahrverhalten des Fahrzeugs möglichst nicht ungünstig beeinflussen.

Es wird oft die Ansicht vertreten, daß man über die Fahreigenschaften von Einspurfahrzeugen keine der Praxis dienenden Rechnungen durchführen kann, weil das Fahrverhalten des Motorrades zu sehr durch die unkontrollierbare und undurchsichtige Koppelung zwischen Fahrer und Fahrzeug der wissenschaftlichen Behandlung entzogen sei. Dies ist, wie auch später gezeigt wird, nicht der Fall. Schon die normale Fahrpraxis lehrt, daß insbesondere in fahrtechnisch kritischen Situationen ein besonderer Eingriff des Fahrers nur selten den gewünschten Erfolg hat und daß derjenige Fahrer am sichersten fährt, der mit den geringsten Korrekturkräften auskommt. Der zweifellos vorhandene Einfluß des Fahrers, der in der Rechnung nicht berücksichtigt wird, kann weitgehend erfaßt und eliminiert werden.

0.100 Die Entwicklung der theoretischen Behandlung des Einspurfahrzeuges

Drais, der im Jahre 1813 den Vorläufer aller Einspurfahrzeuge, sein Lauf-
rad, vorstellte, hatte im Prinzip ein äußerst brauchbares Fortbewegungsmittel
erfunden, das in seiner Form kaum geändert worden ist, wenn man von dem
Versuch, das Hochrad aus Fahrstabilitäts- und Antriebsgründen einzuführen
(um 1870), absieht.

Die Energieersparnis und die leichte Lenkbarkeit des Zweirades gegenüber
den anderen Fahrzeugen erkannte man als seine wesentlichen Vorteile, während
man als Nachteil der Konstruktion ansehen muß, daß sich in aufrechter Stel-
lung der Schwerpunkt in labilem Gleichgewicht befindet. Dies wird jedoch
dank glücklicher physikalischer Eigenschaften des sich bewegenden Systems,
die später noch eingehend besprochen werden, weitgehend ausgeglichen, so
daß das Erlernen des Fahrens und das Beibehalten der aufrechten Fahrlage
keine besonderen Schwierigkeiten bereitet.

So wurde die Frage nach der notwendigen Energie zum Fahren eines Zwei-
rades in den Vordergrund gedrängt und viel früher und weit mehr behandelt
als die Frage nach einer bestmöglichen und verkehrssicheren Fahrgestellkon-
struktion. Es ist erstaunlich, daß die heutigen sehr schnellen Maschinen mit
ihren empirisch entwickelten Fahrgestellen in bezug auf Fahrtrichtungshaltung
und Fahrsicherheit den Anforderungen einigermaßen gewachsen sind. Be-
sonders erstaunlich, wenn man sieht, mit welchem theoretischen Aufwand
andere technische Geräte entwickelt werden.

Schon bei der Fahrradkonstruktion war die vermeintlich „wesentliche Frage“ die nach der Energie, die der Fahrer aufwenden muß, schon mehrfach eingehend behandelt worden, bevor *Rankine* [1] 1869 sich als erster mit den dynamischen Prinzipien der Bewegung eines Fahrrades befaßte. Seine Theorie berücksichtigt nur die vom Fahrer selbst ausgeführte Stabilisierung: Neigt sich etwa das ganze Rad auf die rechte Seite, so wird der Fahrer das Vorderrad nach eben dieser Seite drehen und dadurch das Rad zwingen, nach rechts auszubiegen. Die durch die Wendung entstehende, im Schwerpunkt angreifende Zentrifugalkraft hat ein Moment um die Spurlinie, das die Radebene wieder aufrichtet. Um ein Überfallen auf die linke Seite zu vermeiden, muß der Fahrer die Lenkstange wieder nach links drehen usw.

Auch *Bourlet* [2] (1898), der fast alle einschlägigen Probleme besprochen hat, läßt die für die Fahrstabilität notwendigen Lenkausschläge vom Fahrer ausführen. Seine Voraussetzungen sind aber so speziell gewählt, daß den Ergebnissen weniger Bedeutung zukommt.

Die Bewegungsgleichung für die Vorwärtsbewegung des Einspurfahrzeugs stellte als erster *Mc Gaw* [3] (1898) auf. Seine Differentialgleichung wird weiterentwickelt von *Whipple* [4] (1899), *Carvallo* [5] (1901) und durch *Klein* und *Sommerfeld* [6] (1904), die als erste nachweisen, daß erst durch die Kreiselwirkung der Räder eine vollständige Stabilisierung der Vorwärtsbewegung möglich ist. Nur noch vier weitere Arbeiten über dieses Gebiet sind bekannt: *Bower* [7] (1915) beschreibt den Einfluß der Baugrößen auf die Seitenneigung und stellt mit einem stark vereinfachten Zweirad die Bewegungsgleichung auf. (Steuerwinkel $\sigma = 0!$) *Pearsall* [8] (1922) nimmt in seine Gleichungen den Steuerwinkel auf, während *Wilson-Jones* [9] (1951) ohne Gleichungen, nur mit einfachen Überlegungen, diesem komplizierten Zusammenspiel der Kräfte beizukommen versucht.

Erst *Döhring* [10, 11] (1954) erweitert die *Klein-Sommerfeldschen* Gleichungen und schafft damit eine brauchbare Grundlage für die weitere Behandlung des Problems.

Ferner sei auf die Arbeiten von *Döhring* [12], *Mühlfeld* [13], *Froede* [14] und *Gammel* [15] hingewiesen.

Bei der theoretischen Behandlung des Einspurfahrzeugs sind zwei Entwicklungsrichtungen zu erkennen. In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts beschäftigte man sich mit der Frage, inwieweit das Fahren mit einem Fahrrad möglich sei. Das Ergebnis dieses Bemühens waren Bewegungsgleichungen, in denen nur Größen zweiter Ordnung vernachlässigt wurden. In den letzten 50 Jahren hat man sich dagegen mit dem Einfluß der Baugrößen beschäftigt, und es hätte nahegelegen, auf die bekannten Arbeiten aufzubauen. Man scheute vielleicht die schlecht abzuschätzenden Gleichungen und die damit verbundene Rechenarbeit und ging wieder auf stark vereinfachte Systeme und Annahmen zurück. So ist es nicht verwunderlich, wenn die Autoren zu widersprechenden Ergebnissen kommen. Mit Hilfe der neuen erweiterten Bewegungsgleichungen dürfte jetzt eine vertretbare Beurteilung der Baugrößen möglich sein, und man könnte endgültig davon abgehen, z. B. als Grund für die Schrägstellung der Steuerachse technische Eleganz oder fabrikatorische Vorteile anzusehen und als kennzeichnende Baugrößen nur Steuerwinkel und Nachlauf zu betrachten.

1.000 Die Theorie und Berechnungsmöglichkeiten zur Ermittlung des Fahrverhaltens von Einspurfahrzeugen

1.100 Die Bewegungsgleichungen und deren mechanische Deutung

Für ein „Einrad“, d. h. eine einzelne rollende Scheibe, ist der Bewegungsablauf bei genügender Geschwindigkeit stabil. Die relativ größte Ähnlichkeit mit einer einfachen Scheibe hatten die ursprünglich vielgebrauchten „Hochräder“, bei denen zu dem großen Vorderrad, das der einzelnen Scheibe entspricht, nur ein kleines Hinterrad tritt, um den Sitz des Fahrers zu stützen und die Lenkung zu ermöglichen. Die Zahl der Freiheitsgrade des Systems würde durch das Hinterrad um eins verringert und die Stabilisierung unmöglich gemacht, wenn nicht eine drehbare Lenkstange die Verdrehung der Vorderadebene gegen die des Hinterrades erlaubte. Bei Feststellung der Lenkstange hätte das ganze System nur noch zwei Freiheitsgrade, das Umkippen um die horizontale Spurlinie und die mit Raddrehung verbundene Vorwärtsbewegung, wodurch jede Möglichkeit der Stabilisierung fortfiel.

Damit ist bereits der grundlegende und notwendige Aufbau eines Einspurfahrzeugs aufgezeigt: Zwei Systeme, die um eine gemeinsame Achse (Steuerachse) drehbar sind, dem Vorderrad mit der Gabel, dem Lenker, der Lampe und dem Kotflügel sowie dem Hinterrad mit dem Rahmen, dem Motor und dem mit dem Rahmen starr verbundenen gedachten Fahrer.

Zur Bestimmung der Lage des Fahrzeugs sind fünf Koordinaten nötig:
Zwei Koordinaten legen den Aufstandspunkt des Hinterrades fest, zwei

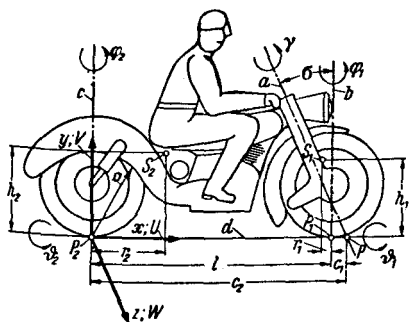


Abb. 1. Einspurfahrzeug. a Steuerachse, b Lotrechte durch den Aufstandspunkt P_1 des Vorderwheels, c Lotrechte durch den Aufstandspunkt P_2 des Hinterrads, d Spurlinie, p Durchstichpunkt von a durch die Fahrbahn, S_1 und S_2 Schwerpunkte des Vorder- bzw. des Hinterradsystems, σ Steuerwinkel (Winkel zwischen a und b), γ Lenkeinschlagwinkel um a, φ_1 und φ_2 Winkel der Vorder- bzw. der Hinterradebene gegen die mittlere Fahrtrichtungsene, θ_1 und θ_2 Neigungswinkel der Vorder- bzw. der Hinterradebene gegen die Lotrechte, h_1 und h_2 Abstand des Punktes S_1 bzw. S_2 von d, r_1 und r_2 Abstand des Schwerpunktfußpunktes ad v vom Aufstandspunkt für das Vorder- bzw. das Hinterrad, $c_1 = P_1P$ Nachlauf, $c_2 = P_2P$, $l = P_1P_2 = c_2 - c_1$ Radstand; x, y, z körperfestes Koordinatensystem; C, V, W raumfestes Koordinatensystem, o Drehvektor

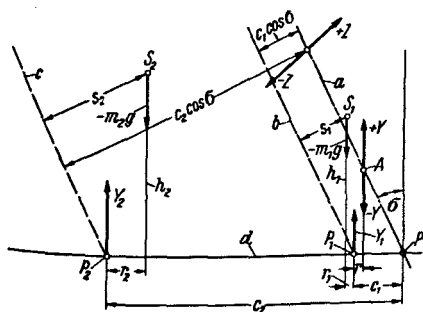


Abb. 2. Kräfte am Einspurfahrzeug. a, d, P_1 , P_2 , P , S_1 , S_2 , σ , h_1 , h_2 , r_1 , r_2 , c_1 , c_2 wie in Abb. 1, ferner: b und c Parallele zu a durch P_1 bzw. P_2 , P , a Angriffspunkt der lotrecht wirkenden Reaktionskräfte Y , r waagerechter Abstand zwischen A und P_1 , s_1 Abstand des Punktes S_1 von b, s_2 Abstand des Punktes S_2 von c, m und M Masse des Vorder- bzw. des Hinterradsystems, g Fallbeschleunigung, Y lotrechte Reaktionskraft in der Steuerachse, Z senkrecht zur Radebene in der Steuerachse wirkende Reaktionskraft, Y_1 und Y_2 lotrechte Reaktionskraft in P_1 bzw. in P_2 .

Winkel geben die Lage der Hinterradebene an, und eine Koordinate bestimmt den Winkel zwischen der Rahmen- und der Vorderradebene. Die Lage des ganzen Fahrzeugs ist hiernach bereits bestimmt, da noch die Bedingung hinzukommt, daß beide Räder den Boden berühren müssen; da diese auf dem Boden abrollen sollen, ist durch die Lage der Vorderradebene auch seine Bewegungsrichtung bestimmt und da beide Systeme durch die Steuersäule fest miteinander verbunden sind, auch die Bewegung der Hinterradebene. Willkürlich bleibt nur noch die Geschwindigkeit der Vorwärtsbewegung. Das Rad hat also nur drei Freiheitsgrade. Dies ist das charakteristische Merkmal von nicht holonomen Systemen: Die Bedingungsgleichungen zwischen den fünf Koordinaten der Lage bilden ein nicht integrables System von Differentialgleichungen.

Die ausführliche Entwicklung der Bewegungsgleichungen bringt *Döhring* [10]; hier soll nun nochmals aufgezeigt werden, aus welchen Bestandteilen sie aufgebaut sind, da dies für das Verständnis des Bewegungsablaufes zweckmäßig erscheint (Abb. 1, 2).

Bei der ersten Gleichung für die Drehung um die Spurlinie wird die Änderung des Dralles ausgedrückt durch die Produkte von Trägheitsmomenten und Winkelbeschleunigungen:

$$J_{1u} \ddot{\vartheta}_1 + J_{2u} \ddot{\vartheta}_2 - J_{1uv} \ddot{\varphi}_1 - J_{2uv} \ddot{\varphi}_2$$

Die Summe dieser Glieder ist gleich der Summe der um die Spurlinie wirkenden Momente, nämlich

der Kreiselwirkung	$+ N_1 \dot{\varphi}_1 + N_2 \dot{\varphi}_2$	mit $N_i = J \cdot \omega$
der Zentrifugalkraft	$+ v (m_1 h_1 \dot{\varphi}_1 + m_2 h_2 \dot{\varphi}_2)$	(1.1/1)
der Schwerkraft	$+ g (m_1 h_1 \vartheta_1 + m_2 h_2 \vartheta_2)$	
und den Reaktionen	$g \left(m_2 \frac{r_2}{l} - m_1 \frac{r_1}{l} \right) (c_1 - r) \operatorname{ctg} \sigma (\vartheta_1 - \vartheta_2)$	
in vertikaler Richtung		

Die zweite Gleichung wird für Achsen parallel zur Steuerachse aufgestellt. Neben einer Vertikalreaktion Z wirken hier noch Reaktionskräfte Y senkrecht zur Radebene, die jedoch eliminiert werden können. Wie vorhin findet man wieder die Änderung des Dralles:

$$c_2 [(J_{1v} \cos \sigma + J_{1uv} \sin \sigma) \ddot{\varphi}_1 - (J_{1uv} \cos \sigma + J_{1u} \sin \sigma) \ddot{\vartheta}_1] \\ + c_1 [(J_{2v} \cos \sigma + J_{2uv} \sin \sigma) \ddot{\varphi}_2 - (J_{2uv} \cos \sigma + J_{2u} \sin \sigma) \ddot{\vartheta}_2]$$

welche gleichgesetzt wird mit den Momenten

der Kreiselwirkung	$- [(N_1 \dot{\vartheta}_1 c_2 + N_2 \dot{\vartheta}_2 c_1) \cos \sigma + (N_1 \dot{\varphi}_1 c_2 + N_2 \dot{\varphi}_2 c_1) \sin \sigma]$
der Zentrifugalkraft	$- v (c_2 m_1 s_1 \dot{\varphi}_1 + c_1 m_2 s_2 \dot{\varphi}_2)$
der Schwerkraft	$- g (c_2 m_1 s_1 \vartheta_1 + c_1 m_2 s_2 \vartheta_2)$
und der	
Vertikalreaktionen	$g c_1 c_2 (\vartheta_2 - \vartheta_1) \left(m_2 \frac{r_2}{l} - m_1 \frac{r_1}{l} \right) \cos \sigma$

(1.1/2)

Ferner gilt, wie nach Abb. 3 leicht entwickelt werden kann, die nicht-holonyme Bedingungsgleichung

$$c_2 \dot{\varphi}_2 = c_1 \dot{\varphi}_1 + v \psi \quad (1.1/3)$$

die Beziehung für den Einschlagwinkel

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \psi \quad (1.1/4)$$

und die kinematische Beziehung

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = -\psi \cdot \operatorname{tg} \sigma \quad (1.1/5)$$

Die Gleichungen (1.1/1) und (1.1/2) sind die brauchbaren Bewegungsgleichungen für ein Einspurfahrzeug, mit denen die folgenden Untersuchungen und Berechnungen durchgeführt werden.

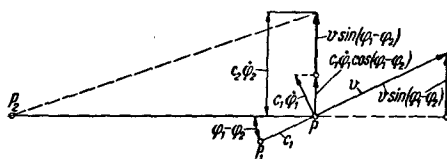


Abb. 3. Geschwindigkeiten am Einspurfahrzeug. P, P₁, P₂, c₁, c₂, φ₁, φ₂ wie in Abb. 1, ferner: v Fahrgeschwindigkeit des Vorderrades, φ₁ = dφ₁/dt, φ₂ = dφ₂/dt

An Hand der einzelnen Summanden dieser Gleichungen läßt sich schon jetzt der für das Verständnis des Problems wichtigste Bewegungsvorgang qualitativ überblicken.

Neigt sich z. B. das Hinterradsystem durch eine Bewegung des Fahrers, durch einen Windstoß oder durch den Einfluß einer Fahrbahnnunehheit zur Seite, so wird bei einer bestimmten Größe der Dralländerung die Beschleunigung und in gewisser Weise auch die Winkeländerung um so kleiner, je größer die betreffenden Trägheitsmomente sind. Diese Winkeländerung wird auch dem Vorderradsystem mitgeteilt, da beide über die Steuerachse gelenkig miteinander verbunden sind. Bei einer Seitenneigung der Hinterradebene wird also zwangsläufig auch die Vorderradebene geneigt, und durch die Kreiselwirkung des Rades dreht sich diese nach der nämlichen Seite um die Steuerachse. Allerdings wirkt auch die am Vorderrad angreifende Schwere (wenn der Schwerpunkt vor der Steuerachse liegt) zusammen mit der vom Hinterrad auf das Vorderrad übertragenen Reaktion Z dahin, daß das Vorderrad nach dieser Seite hin ausbiegt. Trotzdem sind diese zuletzt genannten Wirkungen allein nicht imstande, wie später gezeigt wird, das System vollständig zu stabilisieren.

Der Einfluß des sich drehenden Rades beruht also darauf, daß es, nach einer Seite geneigt, durch die Kreiselwirkung gezwungen wird, auszubiegen und dadurch die anderen Kräfte einsetzt. Die Kreiselwirkung ist die einzige

mit $\frac{d\vartheta}{dt}$ proportionale Kraft, während die durch die Schwere entstandene Kraft mit ϑ selbst proportional ist, und daher folgt die Kreiselwirkung rascher der seitlichen Neigung als die Schwerewirkung. Dann erst tritt die Zentrifugalkraft in Tätigkeit, die das Rad wieder aufrichtet. Die eigentlich stabilisierende Kraft, die der Schwerkraft entgegenwirkt, ist die Zentrifugalkraft, der Kreiselwirkung fällt die Rolle der Auslösung zu.

Jede andere Änderung der vertikalen Geradeausfahrt, sei es ein Impuls auf die Lenkung oder ein anderes Auslenken des Vorderradsystems, wird sich im Prinzip nach dem gleichen Schema dieses beschriebenen Bewegungsverlaufes abspielen.

1.200 Die Frequenzgleichung und die theoretischen Möglichkeiten des Bewegungsablaufes

Der erste Schnitt zur Ermittlung des Bewegungsablaufes ist die Aufstellung der Frequenzgleichung. Dazu werden die Gleichungen (1.1/3), (1.1/4) und (1.1/5) in (1.1/1) und (1.1/2) eingesetzt, und man erhält zwei homogene Differentialgleichungen mit den Veränderlichen ϑ_1 und ϑ_2 und deren ersten und zweiten Ableitungen.

Macht man diese Gleichungen dimensionslos durch Einführen der Massen-, Trägheits-, Längen- und Kreiselverhältnisse, so werden die Ausdrücke einfacher und übersichtlicher, und sie gelten für alle Maschinen mit den gleichen Verhältniszahlen.

Sie lauten mit den Abkürzungen T_i und X_i für die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} T_1 \frac{l^2}{v^2} \ddot{\vartheta}_1 + T_2 \frac{l^2}{v^2} \ddot{\vartheta}_2 + T_3 \frac{l}{v} \dot{\vartheta}_1 + T_4 \frac{l}{v} \dot{\vartheta}_2 + T_5 \vartheta_1 + T_6 \vartheta_2 &= 0 \\ X_1 \frac{l^2}{v^2} \ddot{\vartheta}_1 + X_2 \frac{l^2}{v^2} \ddot{\vartheta}_2 + X_3 \frac{l}{v} \dot{\vartheta}_1 + X_4 \frac{l}{v} \dot{\vartheta}_2 + X_5 \vartheta_1 + X_6 \vartheta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.20/1)$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung ermöglicht der Ansatz

$$\vartheta_1 = \alpha e^{\lambda t} \quad \vartheta_2 = \beta e^{\lambda t}$$

Nun wird eingeführt

$$\Omega = \frac{l}{v} \cdot \lambda \text{ und } \tau = \frac{v}{l} t; \text{ dann ist } \lambda t = \Omega \cdot \tau$$

$$\text{Somit wird für } \vartheta_1 = \alpha e^{\lambda t} \quad \Theta_1(\tau) = \alpha e^{\Omega \tau}$$

$$\begin{aligned} \frac{l}{v} \dot{\vartheta}_1 &= \alpha \frac{l}{v} \lambda e^{\lambda t} & \Theta_1(\tau) &= \alpha \Omega e^{\Omega \tau} \\ \frac{l^2}{v^2} \ddot{\vartheta}_1 &= \alpha \frac{l^2}{v^2} \lambda^2 e^{\lambda t} & \ddot{\Theta}_1(\tau) &= \alpha \Omega^2 e^{\Omega \tau} \end{aligned} \quad (1.20/2)$$

entsprechend für ϑ_2 . Mit $f = \frac{1}{Fr^2} = \frac{g \cdot l}{v^2}$ heißen die vollständigen Gleichungen

I

$$\begin{aligned}
& \ddot{\Theta}_1 \{ + (K_{1vu}^2 \cdot M \cdot C_2 + K_{2vu}^2 \cdot C_1) + K_{1u}^2 \cdot M \cdot \operatorname{tg} \sigma \} \\
& + \ddot{\Theta}_2 \{ - (K_{1vu}^2 \cdot M \cdot C_2 + K_{2vu}^2 \cdot C_1) + K_{2u}^2 \cdot \operatorname{tg} \sigma \} \\
& + \dot{\Theta}_1 \{ + (K_{1vu}^2 \cdot M + K_{2vu}^2 + M \cdot H_1 \cdot C_2 + H_2 \cdot C_1) + K_R^2 (M_{R2} \cdot C_1 + M_{R1} \cdot C_2) \} \\
& + \dot{\Theta}_2 \{ - (K_{1vu}^2 \cdot M + K_{2vu}^2 + M \cdot H_1 \cdot C_2 + H_2 \cdot C_1) - K_R^2 (M_{R2} \cdot C_1 + M_{R1} \cdot C_2) \} \\
& + \Theta_1 \{ + [K_R^2 (M_{R1} + M_{R2}) + M \cdot H_1 + H_2] - f (R_2 \cdot C_1 - R_1 \cdot M \cdot C_2 + M \cdot H_1 \cdot \operatorname{tg} \sigma) \} \\
& + \Theta_2 \{ - [K_R^2 (M_{R1} + M_{R2}) + M \cdot H_1 + H_2] + f (R_2 \cdot C_1 - R_1 \cdot M \cdot C_2 - H_2 \cdot \operatorname{tg} \sigma) \} = 0
\end{aligned} \quad (1.20/3)$$

II

$$\begin{aligned}
& \ddot{\Theta}_1 \{ - [M \cdot C_2^2 (K_{1v}^2 \cos \sigma + K_{1vu}^2 \sin \sigma) + C_1^2 (K_{2v}^2 \cos \sigma + K_{2vu}^2 \sin \sigma)] \\
& \quad - C_2 \cdot M \cdot \operatorname{tg} \sigma (K_{1u}^2 \sin \sigma + K_{1vu}^2 \cos \sigma) \} \\
& + \ddot{\Theta}_2 \{ + [M \cdot C_2^2 (K_{1v}^2 \cos \sigma + K_{1vu}^2 \sin \sigma) + C_1^2 (K_{2v}^2 \cos \sigma + K_{2vu}^2 \sin \sigma)] \\
& \quad - C_1 \cdot \operatorname{tg} \sigma (K_{2u}^2 \sin \sigma + K_{2vu}^2 \cos \sigma) \} \\
& + \dot{\Theta}_1 \{ - [C_2 \cdot M (K_{1v}^2 \cos \sigma + K_{1vu}^2 \sin \sigma) + C_1 (K_{2v}^2 \cos \sigma + K_{2vu}^2 \sin \sigma) \\
& \quad + C_2^2 \cdot M \cdot S_1 + C_1^2 \cdot S_2] + K_R^2 \sin \sigma [C_2 \cdot M_{R1} - M_{R2} \cdot C_1^2 - M_{R1} \cdot C_2^2] \} \\
& + \dot{\Theta}_2 \{ + [C_2 \cdot M (K_{1v}^2 \cos \sigma + K_{1vu}^2 \sin \sigma) + C_1 (K_{2v}^2 \cos \sigma + K_{2vu}^2 \sin \sigma) \\
& \quad + C_2^2 \cdot M \cdot S_1 + C_1^2 \cdot S_2] + K_R^2 \sin \sigma [C_1 \cdot M_{R2} + M_{R2} \cdot C_1^2 + M_{R1} \cdot C_2^2] \} \\
& + \Theta_1 \{ - [K_R^2 \sin \sigma (M_{R1} \cdot C_2 + M_{R2} \cdot C_1) + C_2 \cdot M \cdot S_1 + C_1 \cdot S_2] \\
& \quad + f [M \cdot S_1 \cdot C_2 \cdot \operatorname{tg} \sigma + C_1 \cdot C_2 \sin \sigma (R_2 - M \cdot R_1)] \} \\
& + \Theta_2 \{ + [K_R^2 \sin \sigma (M_{R1} \cdot C_2 + M_{R2} \cdot C_1) + C_2 \cdot M \cdot S_1 + C_1 \cdot S_2] \\
& \quad + f [S_2 \cdot C_1 \cdot \operatorname{tg} \sigma - C_1 \cdot C_2 \sin \sigma (R_2 - M \cdot R_1)] \} = 0
\end{aligned} \quad (1.20/4)$$

oder

$$\begin{aligned}
\text{I} \quad T_1 \ddot{\Theta}_1 + T_2 \ddot{\Theta}_2 + T_3 \dot{\Theta}_1 + T_4 \dot{\Theta}_2 + T_5 \Theta_1 + T_6 \Theta_2 &= 0 \\
\text{II} \quad X_1 \ddot{\Theta}_1 + X_2 \ddot{\Theta}_2 + X_3 \dot{\Theta}_1 + X_4 \dot{\Theta}_2 + X_5 \Theta_1 + X_6 \Theta_2 &= 0
\end{aligned} \quad (1.20/5)$$

Wir erhalten dann in bekannter Weise eine algebraische Gleichung für Ω , und zwar vom 4. Grade, da vier die Summe der Ordnungen der Differentialgleichungen I und II ist. Setzen wir (1.20/2) in (1.20/3) und (1.20/4) ein, so erhalten wir nach Forthebung des Faktors $e^{Q\tau}$ zwei in a und b lineare homogene Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a_{11} + b_{12} &= 0 \\
a_{21} + b_{22} &= 0
\end{aligned} \quad (1.20/6)$$

Die Koeffizientendeterminante Δ ist gleich 0 zu setzen:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_1 \Omega^2 + T_3 \Omega + T_5; & T_2 \Omega^2 + T_4 \Omega + T_6 \\ X_1 \Omega^2 + X_3 \Omega + X_5; & X_2 \Omega^2 + X_4 \Omega + X_6 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.20/7)$$

Die Ausrechnung dieser Determinante würde eine Gleichung der folgenden Form ergeben, wenn man unter $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \varepsilon$ von f unabhängige Größen versteht:

$$\begin{aligned} \alpha \Omega^4 + \beta \Omega^3 + (\gamma_1 - \gamma_2 f) \Omega^2 + (\delta_1 - \delta_2 f) \Omega + (\varepsilon_1 f - \varepsilon_2) f = 0 \\ = b_4 \Omega^4 + b_3 \Omega^3 + b_2 \Omega^2 + b_1 \Omega + b_0 = 0 \end{aligned} \quad (1.20/8)$$

Für das vorliegende Schwingungsproblem ist dies die charakteristische Gleichung der homogenen linearen Differentialgleichungen. Ihre Lösung erscheint mit obigem Ansatz in der Form:

$$\Theta_j = \sum_{j=1}^4 C_j e^{\Omega_j \tau}$$

mit den Wurzeln Ω_j der charakteristischen Gleichung $g(\Omega) = 0$, wobei die C_j Konstante oder auch Polynome in τ (bei Mehrfachwurzeln) bedeuten. Im Falle reeller Wurzeln $\Omega_j = a_j$ sind die zugehörigen Lösungsbestandteile Exponentialfunktionen. Im Falle komplexer Wurzeln, die bei reellen Koeffizienten paarweise konjugiert in der Form $\Omega_j = a_j \pm i\omega_j$ auftreten, ergeben sich Schwingungsausdrücke der Form:

$$e^{a_j \tau} (A_j^* \cos \omega_j \tau + B_j^* \sin \omega_j \tau)$$

In jedem Fall gehört zum reellen Wurzelbestandteil a_j eine Exponentialfunktion, und der in Frage stehende Bewegungsablauf ist ein mit der Zeit τ abklingender, d. h. aber ein stabiler Verlauf genau dann, wenn sämtliche Wurzeln Ω_j negative Realteile $a_j < 0$ aufweisen.

An dieser Stelle sei eingefügt, daß es im Hinblick auf dieses Stabilitätsproblem von besonderer Wichtigkeit wäre, für diese algebraische Gleichung ein Kriterium dafür angeben zu können, daß sämtliche Wurzeln nur negativen Realteil besitzen; Kriterien, die die Stabilität des Bewegungsablaufes von vornherein sicherstellen, ohne daß man die Wurzeln der Gleichung im einzelnen bestimmen muß. Ein solches Kriterium hat *Hurwitz* angegeben, wesentlich bequemer ist das von *Routh* durch Zeilenkombination der *Hurwitz*-Determinante entwickelte.

Eine notwendige Bedingung für die Stabilität verlangt, daß sämtliche Koeffizienten b_4, b_3, b_2, b_1, b_0 der vorliegenden algebraischen Gleichung von einerlei Vorzeichen sind. Bei einer Gleichung 4. Grades kommen noch zwei hinreichende Bedingungen hinzu:

notwendige Bedingung $b_4 \dots b_0 > 0$

hinreichende Bedingung
$$\begin{cases} H = b_3 b_2 - b_1 b_4 > 0 \\ K = H b_1 - b_3^2 b_0 > 0 \end{cases} \quad (1.20/9)$$

Theoretisch wäre es möglich, mit Hilfe dieser Kriterien den Einfluß der Geschwindigkeit und der Baugrößen auf die Stabilität des Bewegungsablaufes zu bestimmen. Der Einfluß aller Baugrößen kann wegen der vielfältigen Kombinationen derselben in den einzelnen Faktoren der Frequenzgleichung auf diese Weise nicht erfaßt werden, sondern es ist notwendig, den Bewegungs-

ablauf selbst zu ermitteln. Hinzu kommt, daß die Stabilität der Bewegung noch keine ausreichende Beurteilung des Fahrverhaltens darstellt, wie später noch gezeigt wird. Nimmt man an, wie es für die Krafträder der Fall sein dürfte, daß sich die Lösungen immer an der Stabilitätsgrenze bewegen und die notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, so lassen sich über den Einfluß der Geschwindigkeit und einiger Baugrößen schon wertvolle Aussagen machen. Stellt man Betrachtungen über die praktisch möglichen Kombinationen der Lösungen der Gleichung 4. Grades an, so gibt es folgende Möglichkeiten:

vier reelle negative Wurzeln;

zwei reelle negative Wurzeln und ein konjugiert komplexes Lösungspaar mit negativem Realteil;

oder je eine der reellen negativen Wurzeln ist positiv, der Zahlenwert selbst aber relativ klein gegenüber den anderen absoluten Wurzelwerten.

Mit diesen Wurzeln und den entsprechenden Koeffizienten, die selbst wieder positiv oder negativ sein können, lassen sich die partikulären Integrale der Differentialgleichung errechnen. Die Summe derselben ergibt die gesuchte Bewegung z. B. für ψ nach den Gleichungen (1.22/13) und (1.22/14).

Für den Fall von nur gedämpften Bewegungsanteilen zeigt Abb. 4 die Typen von Kriechbewegungen.



Abb. 4. Typen von Kriechbewegungen

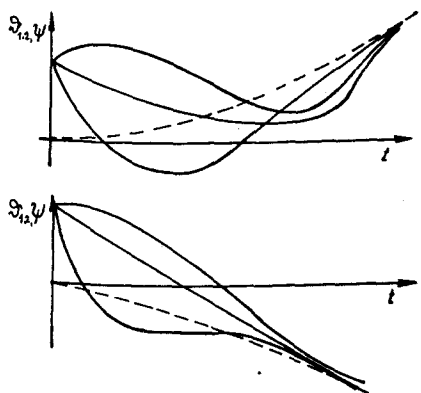


Abb. 5. Typen von Kriechbewegungen mit einem zusätzlich aufschaukelnden Anteil

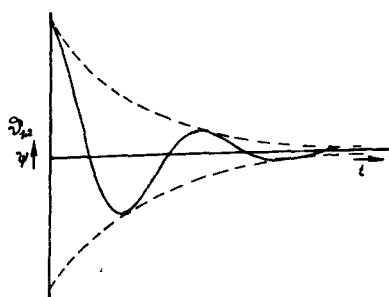


Abb. 6. Schwingungen mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung

Tritt eine positive Wurzel auf, so sind diese Kurvenzüge einer Kurve zu überlagern, deren ϑ_1 , ϑ_2 oder ψ -Werte mit der Zeit größer werden. Je nach der Steigung derselben nähern sich die Kurven nach Abb. 4 von oben oder unten dem aufsteigenden Ast. Abb. 5 zeigt zwei von den vier Möglichkeiten, da der instabile Anteil der Lösungsgleichung auch noch positiv oder negativ sein kann.

Tritt eine gedämpfte Schwingung nach Abb. 6 auf, so überlagert sich diese Kurve den vorstehend gezeigten.

1.210 Betrachtungen über die Fahrstabilität

Im folgenden soll erörtert werden, welchen Einfluß insbesondere die Geschwindigkeit und die Kreiselkräfte auf die Stabilitätsbereiche des Bewegungsablaufes eines Einspurfahrzeuges haben. Die Auflösung der Determinanten (1.20/7) ergibt die Gleichung (1.20/8), deren Koeffizienten errechnet wurden. Eingehende Betrachtung der Koeffizienten von Ω^4 und Ω^3 zeigen, daß diese im Normalfall positiv sind. Auf der Analogierechenmaschine werden bei den später beschriebenen Untersuchungen über den Einfluß der Bau-Größen alle möglichen Kombinationen und Ausnahmefälle untersucht, so daß man sich hier auf die Betrachtung des Normalfalles beschränken kann.

Ω^2 hat den Koeffizienten $(\gamma_1 - \gamma_2 f) =$

$$\begin{aligned} \approx & - [K_R^2 (M_{R1} + M_{R2}) + M H_1 + H_2] \\ & [C_1 (K_{2u}^2 \sin \sigma + K_{2vu}^2 \cos \sigma) + C_2 M (K_{1u}^2 \sin \sigma - K_{1vu}^2 \cos \sigma)] \\ & + K_R^2 \cos \sigma (C_2 M_{R1} + C_1 M_{R2}) \\ & [K_{1vu}^2 M + K_{2vu}^2 + K_{2u}^2 \operatorname{tg} \sigma + K_{1u}^2 M \operatorname{tg} \sigma + H_1 M C_2 + H_2 C_1 + S_1 M C_2 + S_2 C_1] \\ & + K_R^4 \cos \sigma (C_2 M_{R1} + C_1 M_{R2})^2 \\ & + f \{ - [M H_1 + H_2] \\ & [M C_2^2 (K_{1v}^2 \cos \sigma - K_{1vu}^2 \sin \sigma) + C_1^2 (K_{2v}^2 \cos \sigma + K_{2vu}^2 \sin \sigma)] \\ & - K_{2u}^2 [M S_1 C_2 \operatorname{tg} \sigma + C_1 C_2 \sin \sigma (R_2 - M R_1)] \\ & - K_{1u}^2 M [C_1 C_2 \sin \sigma (R_2 - M R_1)] - K_{1vu}^2 R_2 C_1 C_2 \cos \sigma \\ & + (R_1 M C_2 \operatorname{ctg} \sigma + H_2) K_{1vu}^2 \cos \sigma \\ & + (R_2 C_1 + M H_1 \operatorname{tg} \sigma) [C_1 (K_{2u}^2 \sin \sigma + K_{2vu}^2 \cos \sigma)] \\ & + K_{1u}^2 H_2 \operatorname{tg} \sigma \sin \sigma C_2 \} \end{aligned} \quad (1.21/1)$$

Bei kleinen Geschwindigkeiten ist dieser ganze Ausdruck wegen des großen Anteils von $-\gamma_2 \cdot f$ negativ, bei steigender Geschwindigkeit überwiegt der positive Ausdruck γ_1 . Interessant ist hier, daß im negativen Teil von γ_1 neben $(M H_1 + H_2)$ das kleinere $K_R^2 (M_{R1} + M_{R2})$ steht, daß also der der Stabilität abträgliche Ausdruck hauptsächlich von der Wirkung der Schwerkraft herrührt. Das von der Kreiselwirkung $N \frac{d\varphi}{dt}$ herrührende $K_R^2 (M_{R1} + M_{R2})$ ist also unwesentlich.

Die positiven Ausdrücke mit dem Faktor $K_R^2 \cos \sigma (C_2 M_{R1} + C_1 M_{R2})$ rühren von der Kreiselwirkung $-N \frac{d\vartheta}{dt}$ um die Vertikalachsen her. Diese Wirkung, γ_1 enthält keinen positiven Ausdruck ohne K_R^2 , die auf eine seitliche Neigung des Rades hin das Vorderrad nach der betreffenden Seite dreht und daher das Rad zwingt, nach dieser Seite auszubiegen, ist also zur Stabilisierung erforderlich. Damit ist der Nachweis erbracht, daß ohne Kreiselwirkung eine vollständige Stabilisierung nicht möglich wäre.

Die Stabilisierungsfähigkeit nimmt übrigens wegen des Faktors $\cos \sigma$ in (1.21/1) ab mit zunehmender Schrägstellung der Steuerachse oder größerem Steuerwinkel σ .

Der Koeffizient bei Ω ist schon bei sehr niedrigen Geschwindigkeiten positiv. Als letztes Glied sei der von Ω freie Ausdruck zu untersuchen:

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon_1 f - \varepsilon_2) f = & \\
 & + f \left\{ - (M H_1 + H_2) [K_R^2 \sin \sigma (M_{R1} C_2 + M_{R2} C_1)] \right. \\
 & \quad \left. + (C_2 M S_1 + C_1 S_2) K_R^2 (M_{R1} + M_{R2}) \right\} \\
 & + f^2 \left\{ + M \operatorname{tg} \sigma (H_2 S_1 C_2 - H_1 S_2 C_1) \right. \\
 & \quad + (M H_1 + H_2) [C_1 C_2 \sin \sigma (R_2 - M R_1)] \\
 & \quad \left. - (R_2 C_1 - R_1 C_2) (S_2 C_1 + M S_1 C_2) \right\}
 \end{aligned} \quad (1.21/2)$$

In dem Term mit f überwiegt der negative Ausdruck mit dem Faktor $(M H_1 + H_2)$, der das Gewicht des Hinterradsystems enthält. Der Term mit f^2 wird wegen des großen $+R_1 C_2$ Faktors positiv. Bei höheren Geschwindigkeiten überwiegt überdies der Term mit f , so daß der Koeffizient bei Ω^0 , also normalerweise ab einer bestimmten Geschwindigkeit wieder negativ wird, d. h. die Bewegung wird wieder instabil. Diese Instabilität des Einspurfahrzeugs bei höheren Geschwindigkeiten mag zuerst überraschen, da es paradox erscheint, wenn große Rotationsgeschwindigkeiten, die beim freien Kreisel für die Stabilität günstig sind, beim Einspurfahrzeug nicht die gleiche Wirkung haben.

Sieht man sich jedoch die kinematischen Gleichungen

$$c_2 \dot{\varphi}_2 = c_1 \dot{\varphi}_1 + v \psi \quad (1.1/3)$$

und

$$\psi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (1.1/4)$$

an, die verantwortlich sind für die Bildung des Terms $\varepsilon_2 f$, so erkennt man, daß bei größerer Geschwindigkeit $v \rightarrow \infty$ aus der kinematischen Gleichung (1.1/3) im allgemeinen zu folgern ist (falls nicht auch die Bewegung des Vorderrades sehr rasch erfolgt) daß ψ gegen Null geht, $\psi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$. Dabei muß also vorausgesetzt werden, daß $(c_2 \dot{\varphi}_2 - c_1 \dot{\varphi}_1)$ mit v nicht so stark wächst wie v selbst.

Die nicht holonome Beziehung stellt die anschauliche Tatsache dar, daß sich während der Fahrt das Hinterrad ständig der Spur des Vorderrades

wieder nähert, da das Hinterradsystem an der Vorderradebene um die Steuerachse drehbar gelenkt ist, der Winkel ψ sich also fortwährend verkleinert. Bei großer Geschwindigkeit nähern sich die beiden Ebenen so rasch, daß die beiden Teile des Fahrzeugs wie starr verbunden zu sein scheinen. Die Stabilisierung durch die Kreiselwirkung beruht aber eben auf der relativen Beweglichkeit der beiden Räder. Sobald diese starr verbunden sind, können wir das ganze System mit einem einfachen Kreisel vergleichen, der aber nicht mehr drei, sondern wegen der doppelten Berührung mit dem Erdboden nur noch zwei Freiheitsgrade hat. Bei der Unterdrückung eines Freiheitsgrades hört jedoch jede Möglichkeit der Stabilisierung durch Kreiselwirkungen auf.

Es sei noch erwähnt, daß auch bei beliebig hoher Geschwindigkeit die Bewegung stabil bleiben könnte, wenn σ gegen Null geht, da dann nur noch

$$\Omega^0 f [(C_2 M S_1 + C_1 S_2) K_R^2 (M_{R1} + M_{R2})]$$

übrigbleibt. (Der Ausdruck mit f^2 ist bei höheren Geschwindigkeiten verschwindend klein.) In diesem Falle sind die Eigenschwingungen rasch genug um trotz der scheinbar starren Koppelung zwischen Vorder- und Hinterrad die Stabilität zu erhalten. Außerdem, wie gesagt, nimmt die Stabilisierungsfähigkeit der Kreiselwirkung zu, je steiler die Lenkachse gestellt wird, da die beiden nicht zyklischen Freiheitsgrade, hier Drehung um die Spurlinie und um die Lenkachse, sich voneinander entfernen.

Das Ergebnis dieser Untersuchung ist also, daß das System bei kleineren Geschwindigkeiten durch seine Schwere jedenfalls labil ist. Hiermit übereinstimmend ergibt sich, daß

$$\begin{aligned} \gamma_2 \text{ und } \delta_2 &\text{ negativ,} \\ \alpha \text{ und } \beta \text{ und ebenso } \epsilon_1 &\text{ positiv} \end{aligned}$$

sind. Die Koeffizienten ohne den Faktor f

$$\begin{aligned} \gamma_1 \text{ und } \delta_1 &\text{ sind positiv} \\ \epsilon_2 &\text{ dagegen negativ, aber absolut klein} \end{aligned}$$

gegenüber den übrigen Koeffizienten. Mit wachsender Geschwindigkeit setzen die stabilisierenden Wirkungen der Kreisel- und Zentrifugalmomente ein, und die Koeffizienten von Ω^2 und Ω^2 werden positiv. Bei höheren Geschwindigkeiten überwiegt schließlich $-\epsilon_2 f$ über den Ausdruck $\epsilon_1 f^2$, und das absolute Glied wird negativ.

Der stabile Bereich kann bei einem normalen Motorrad zwischen 30 und 100 km/h liegen, aber auch größer oder kleiner sein. Die Breite des Intervalls kann jedoch nur bedingt für die Güte der Fahreigenschaften herangezogen werden.

1.220 Die Ermittlung des Bewegungsablaufes

1.221 Durch Rechnung

Die charakteristische Gleichung $g(\Omega) = 0$ der Differentialgleichung für die Bewegung eines Einspurfahrzeugs erhält man durch Auflösung der Determinanten (1.20/7) oder durch Eliminieren einer Unbekannten der Bewegungsgleichung in der Form:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\Theta}_2(X_1 T_2 - X_2 T_1) + \ddot{\Theta}_2(X_1 T_4 - X_4 T_1 + X_3 T_2 - X_2 T_3) \\
& + \ddot{\Theta}_2(X_1 T_6 - X_6 T_1 + X_5 T_2 - X_2 T_5 + X_3 T_4 - X_4 T_3) \\
& + \ddot{\Theta}_2(X_3 T_6 - X_6 T_3 + X_5 T_4 - X_4 T_5) + \Theta_2(X_5 T_6 - X_6 T_5) = 0
\end{aligned} \quad (1.22/1)$$

Daraus erhält man die charakteristische Gleichung nach Division durch den Faktor bei Ω^4 in der Form:

$$\Omega^4 + b_3' \Omega^3 + b_2' \Omega^2 + b_1' \Omega + b_0' = 0 \quad \text{mit } b_i' = \frac{b_i}{b_4} \quad (1.22/2)$$

Eine solche Gleichung mit reellen Koeffizienten b_v' läßt sich in jedem Falle zerlegen in zwei reelle Quadratifaktoren, also in

$$(\Omega^2 + p_1 \Omega + q_1)(\Omega^2 + p_2 \Omega + q_2) = 0 \quad (1.22/3)$$

Eine Aufspaltung ist nun auf verschiedenen Wegen möglich. Hier wird das Verfahren des Aufspaltens durch Probieren angewendet [16]. Setzt man die Gleichungen (1.22/2), (1.22/3) gleich, so folgen unmittelbar durch Koeffizientenvergleich die notwendigen Beziehungen. Bei der Rechnung geht man so vor, daß q_1 angenommen und das zugehörige q_2 berechnet wird; hiermit bestimmt man p_1 und p_2 und macht zum Schluß eine Probe, also:

$$\begin{aligned}
q_1 & \text{ wählen } p_2 = b_0'/q_1 \\
p_1 & = \frac{b_1' - b_3' q_1}{q_2 - q_1} \\
p_2 & = b_3' - p_1 \\
Y(q_1) & = q_1 + q_2 + p_1 \cdot p_2 - b_2' = 0
\end{aligned} \quad (1.22/4)$$

Durch mehrmaliges Anwenden dieses Verfahrens läßt sich ein beliebig genauer Wert q_1 ermitteln, besonders schnell, wenn dieser zwischendurch durch quadratisches Eingabeln verbessert wird. Die beiden Quadratifaktoren ergeben die vier Wurzeln der Gleichung.

Zieht man zur Ermittlung der Bewegung von ψ die Gleichungen für $\psi(\tau) = ie^{\Omega \tau}$ und Θ_2 heran und setzt als Anfangsbedingungen z. B. ein:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_2 &= 0 & \Psi &= 0 \\ \dot{\Theta}_2 &= \text{const} & \Psi &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ zur Zeit } \tau = 0$$

so lassen sich die Koeffizienten der Exponentialfunktionen der einzelnen Schwingungsanteile bestimmen. $\dot{\Theta}_2 = \text{const}$ entspricht einem Impuls auf das Hinterradsystem z. B. durch einen Windstoß. Wie schon bereits gesagt, spielt die Art des Anstoßes keine so große Rolle. Die Bewegung wird im Prinzip immer gleich ablaufen.

Für den Fall von vier reellen Wurzeln erhält man:

$$\begin{aligned}
\Theta_2 &= C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3 + C_4 V_4 = 0 \\
\dot{\Theta}_2 &= C_1 V_1 \Omega_1 + C_2 V_2 \Omega_2 + C_3 V_3 \Omega_3 + C_4 V_4 \Omega_4 = \text{const} \\
\Psi &= C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \\
\dot{\Psi} &= C_1 \Omega_1 + C_2 \Omega_2 + C_3 \Omega_3 + C_4 \Omega_4 = 0
\end{aligned} \quad (1.22/5)$$

mit den Amplitudenverhältnissen

$$V_{1\dots 4} = b_j/c_j$$

Die V -Werte erhalten wir aus der Gleichung (1.20/6) mit

$$\frac{a}{b} = -\frac{a_{11}}{a_{21}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$$

und wegen der Beziehung (1.1/5) wird

$$V_j = \frac{b_j}{c_j} = \frac{\operatorname{tg} \sigma}{1 - \frac{a_{11}}{a_{21}}} \quad (1.22/6)$$

mit den Wurzeln Ω_j .

Aus der Gleichung (1.22/5) werden mit Hilfe der *Kramerschen* Regel die Konstanten C_1 bis C_4 bestimmt, um den gegebenen Anfangsbedingungen zu genügen. Es sei $C_j = \bar{C}_j/N$ und damit wird

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= \begin{vmatrix} 0 & V_2 & V_3 & V_4 \\ \text{const} & V_2 \Omega_2 & V_3 \Omega_3 & V_4 \Omega_4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 \end{vmatrix} = -\text{const} \begin{vmatrix} V_2 & V_3 & V_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 \end{vmatrix} \\ &= \text{const} [\Omega_2(V_4 - V_3) + \Omega_3(V_2 - V_4) + \Omega_4(V_3 - V_2)] \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \bar{C}_2 &= \text{const} [\Omega_1(V_3 - V_4) + \Omega_3(V_4 - V_1) + \Omega_4(V_1 - V_3)] \\ \bar{C}_3 &= \text{const} [\Omega_1(V_4 - V_2) + \Omega_2(V_1 - V_4) + \Omega_4(V_2 - V_1)] \text{ und} \\ \bar{C}_4 &= \text{const} [\Omega_1(V_2 - V_3) + \Omega_2(V_3 - V_1) + \Omega_3(V_1 - V_2)] \end{aligned} \quad (1.22/7)$$

Den Nenner erhält man aus den Koeffizienten-Determinanten der linken Seiten der Gleichung: (1.22/5)

$$\begin{aligned} N &= (\Omega_1 \Omega_4 + \Omega_2 \Omega_3)(V_1 - V_4)(V_3 - V_2) + (\Omega_3 \Omega_4 + \Omega_1 \Omega_2)(V_4 - V_3)(V_1 - V_2) \\ &\quad + (\Omega_2 \Omega_4 + \Omega_1 \Omega_3)(V_2 - V_4)(V_1 - V_3) \end{aligned} \quad (1.22/8)$$

Für die auftretenden Fälle von komplexen Wurzeln müssen die obgen Gleichungen umgeschrieben werden.

Die V -Werte für komplexe Wurzeln $\Omega_j = a + \beta i$ erhält man aus folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= -\frac{[T_2(x^2 - \beta^2) + T_4 x + T_6] + [2\alpha\beta T_2 + \beta T_4]i}{[T_1(x^2 - \beta^2) + T_3 x + T_5] + [2\alpha\beta T_1 + \beta T_3]i} = \frac{m + ni}{o + pi} \cdot -1 = \\ &= -1 \frac{[mo + np] + [no - mp]i}{o^2 + p^2} = (q + ri) \cdot -1 \end{aligned} \quad (1.22/9)$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\operatorname{tg} \sigma (1 - q) + i \cdot r \operatorname{tg} \sigma}{(1 - q)^2 + r^2} = s + ti \quad (1.22/10)$$

$$V_{j,j+1} = s \pm ti$$

Mit $\Omega_{3,4} = \alpha \pm \beta i$ und $V_{3,4} = j \pm \delta i$

werden die Koeffizienten der Exponentialfunktionen nach Einsetzen in (1.22/7)

$$\begin{aligned}\bar{C}_1 &= \text{const} \cdot 2i [-\beta(j - V_2) + \delta(\alpha - \Omega_2)] \\ \bar{C}_2 &= \text{const} \cdot 2i [-\beta(V_1 - j) + \delta(\Omega_1 - \alpha)] \\ \bar{C}_{3,4} &= \text{const} \pm [\Omega_1(j - V_2) + \Omega_2(V_1 - j) + \alpha(V_2 - V_1)] \\ &\quad + [\delta(\Omega_2 - \Omega_1) - \beta(V_2 - V_1)]i = \pm \varepsilon' + \xi' i\end{aligned}\quad (1.22/11)$$

Der Nenner wird zu:

$$N = 2i \{ -\delta(V_2 - V_1)[\alpha(\Omega_1 + \Omega_2) - (\beta^2 + \alpha^2 + \Omega_1\Omega_2)] + \beta(\Omega_2 - \Omega_1) \cdot [-V_1V_2 - (j^2 + \delta^2) + j(V_1 + V_2)] \} = \eta i \quad (1.22/12)$$

$$C_{1,2} = \frac{\bar{C}_{1,2}}{N}$$

$$C_{3,4} = \frac{\xi' \mp \varepsilon' i}{\eta} = \xi \mp \varepsilon i$$

Die Bewegungsgleichung lautet mit diesen Werten bei reellen Koeffizienten

$$\Psi = C_1 e^{\Omega_1 \tau} + C_2 e^{\Omega_2 \tau} + C_3 e^{\Omega_3 \tau} + C_4 e^{\Omega_4 \tau} \quad (1.22/13)$$

oder mit einer komplexen Wurzel

$$\begin{aligned}\Psi &= C_1 e^{\Omega_1 \tau} + C_2 e^{\Omega_2 \tau} + (\xi - \varepsilon i) e^{(\alpha + \beta i) \tau} + (\xi + \varepsilon i) e^{(\alpha - \beta i) \tau} \\ &= C_1 e^{\Omega_1 \tau} + C_2 e^{\Omega_2 \tau} + 2 e^{\alpha \tau} (\xi \cos \beta \tau - \varepsilon \sin \beta \tau)\end{aligned}\quad (1.22/14)$$

Da der Winkelausschlag φ eine reelle Zahl sein muß, muß der letzte Ausdruck der Gleichung (122/14) reell werden, wenn die angegebenen Gleichungen zu Recht bestehen sollen:

$$\begin{aligned}C_3 e^{(\alpha + \beta i) \tau} &= (\xi - \varepsilon i) e^{(\alpha + \beta i) \tau} = (\xi - \varepsilon i) e^{\alpha \tau} \cdot e^{\beta i \tau} = \xi e^{\alpha \tau} e^{\beta i \tau} - i \varepsilon e^{\alpha \tau} e^{\beta i \tau} \\ &= \xi e^{\alpha \tau} (\cos \beta \tau + i \sin \beta \tau) - i \varepsilon e^{\alpha \tau} (\cos \beta \tau + i \sin \beta \tau) \\ &= e^{\alpha \tau} (\xi \cos \beta \tau + \varepsilon \sin \beta \tau) + i e^{\alpha \tau} (\xi \sin \beta \tau - \varepsilon \cos \beta \tau) \\ \varphi = \text{tg} \frac{\varepsilon}{\xi} \Bigg| &= e^{\alpha \tau} \sqrt{\xi^2 + \varepsilon^2} \cos(\beta \tau - \varphi) + i e^{\alpha \tau} \sqrt{\xi^2 + \varepsilon^2} \cos(\beta \tau + \varphi) \\ &= \sqrt{\xi^2 + \varepsilon^2} e^{\alpha \tau} (\cos(\beta \tau - \varphi) + i \cos(\beta \tau + \varphi))\end{aligned}$$

Entsprechend wird

$$\begin{aligned}C_4 e^{(\alpha - \beta i) \tau} &= \sqrt{\xi^2 + \varepsilon^2} e^{\alpha \tau} (\cos(\beta \tau - \varphi) - i \cos(\beta \tau + \varphi)) \\ C_3 e^{(\alpha + \beta i) \tau} + C_4 e^{(\alpha - \beta i) \tau} &= \sqrt{\xi^2 + \varepsilon^2} e^{\alpha \tau} [2 \cos(\beta \tau - \varphi)]\end{aligned}$$

Bei komplexen Koeffizienten und komplexen Exponenten wird die Summe der zueinander gehörigen Schwingungsanteile reell, was gezeigt werden sollte.

Diese Gleichungen wurden für einige Gruppen von Grundgrößen mit Hilfe einer Tischrechenmaschine durchgerechnet und der Bewegungsablauf ermittelt. Der Rechnungsgang ist leicht zu übersehen. Da die Bewegung meist in der Nähe der Stabilitätsgrenze liegt, treten relativ kleine Zahlen in der Rechnung auf, die mindestens eine Rechengenauigkeit von sieben Stellen hinter dem Komma bedingen, anderenfalls erhält man falsche Ergebnisse.

Für eine größere Anzahl von Variationen empfiehlt es sich auf jeden Fall, die Ausrechnung einer Ziffernrechenmaschine zu überlassen, wenn man nicht aus bestimmten Gründen eine Analogierechenmaschine zu Hilfe nehmen will. Der Einfluß der Baugrößen auf die Versuchsmaschinen wurde rechnerisch auf einer Digitalmaschine der Firma *Zuse* (Z 22) untersucht. Für diese ganzen Arbeiten einschließlich des Rechnens selbst und des Ausdrucks der Ergebnisse wurde je Variation nur ein Bruchteil der Zeit verwendet, die man mit einer Tischrechenmaschine gebraucht. Mit diesem Lochstreifen können weitere Berechnungen durchgeführt werden, so daß andere Maschinen in bezug auf Fahrstabilität mit geringem Aufwand in kurzer Zeit untersucht werden könnten.

1.222 Mit Hilfe einer elektronischen Analogierechenmaschine

Mechanische Schwingungsvorgänge können elektronisch dargestellt werden durch Simulation, wobei Federn, Massen und Dämpfungen oder, wie hier diesen entsprechende Glieder, ersetzt werden durch Kapazitäten, Induktivitäten und Widerstände oder durch Analogisieren, wobei man von den Schwingungsgleichungen ausgeht, die durch elektrische Integration gelöst werden.

Von der letzteren Möglichkeit wurde bei dem weitaus umfangreichsten Teil der Variationsrechnungen Gebrauch gemacht. Abb. 7 zeigt eine Ansicht

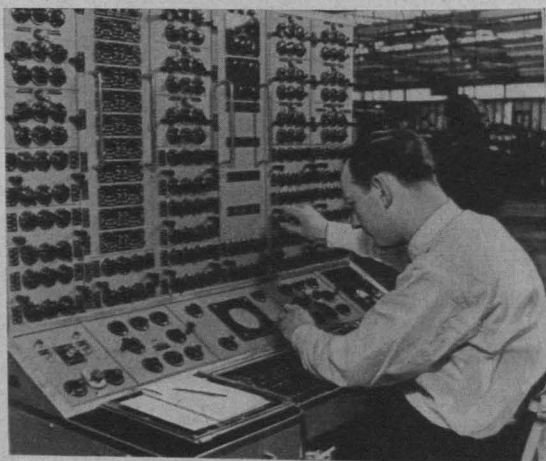


Abb. 7. Ansicht der Analogierechenmaschine

einer Analogierechenmaschine der Firma *Short Brothers And Harland LTD.*, Belfast, mit der Schalttafel, auf der mit Kurzschlußsteckern die Verstärkerkombinationen geschaltet werden können.

Bei den Lösungsversuchen zeigten sich mannigfaltige Schwierigkeiten. Einmal wegen der Nähe der Stabilisierungsgrenze: Die Änderung eines Koeffizienten um 0,5% (dieser Wert liegt unter der Rechengenauigkeit der Verstärker) ließ eine stabile Bewegung bereits instabil werden und umgekehrt.

Aus diesem Grunde mußten diese genauestens einjustiert und das System optimal angesteuert werden. Zum anderen wegen der bei Gleichungssystemen notwendig auftretenden Rückkopplungen: Selbst wenn durch Variation der Unbekannten bzw. Vertauschen der Gleichungen die Kopplungsgrößen kleiner als eins gemacht wurden, schaukelte sich das System ohne Fremderregung auf. Bei dem gegebenen Problem wurden die Grenzen des Analogrechners deutlich.

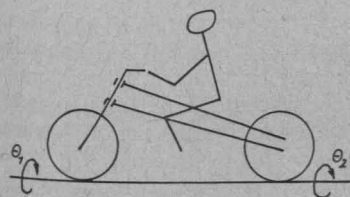
Ein Programmieren der vier Ausgangsgleichungen (1.1/1), (1.1/2), (1.1/3), (1.1/5) wäre die glücklichste Lösung gewesen, da dann in den einzelnen Koeffizienten jeweils nur einige Baugrößen gestanden hätten, deren Einfluß auf den Bewegungsablauf übersichtlich darzustellen gewesen wäre. Außerdem hätte man das auftretende Lenkmoment leicht durch Addition zweier Verstärkerkomponenten erhalten können. Diese Möglichkeit mußte wegen viermaliger Rückkopplung über drei Verstärker und dadurch verstärkerbedingten Instabilität ausschalten.

Die einzig gangbare Lösung schien, möglichst Rückkopplungen zu vermeiden. So wurde aus (1.20/3) $\ddot{\theta}_2$ und aus (1.20/4) $\ddot{\theta}_1$ eliminiert und die neuen Koeffizienten der beiden Differentialgleichungen ermittelt zu

$$\begin{aligned} (T_1 X_2 - T_2 X_1) \dot{\theta}_1 + (T_3 X_2 - T_2 X_3) \dot{\theta}_1 + (T_5 X_2 - T_2 X_5) \theta_1 \\ + (T_4 X_2 - T_2 X_4) \dot{\theta}_2 + (T_6 X_2 - T_2 X_6) \theta_2 = 0 \\ (T_1 X_2 - T_2 X_1) \dot{\theta}_2 + (T_1 X_4 - T_4 X_1) \dot{\theta}_2 + (T_1 X_6 - T_6 X_1) \theta_2 \\ + (T_1 X_3 - T_3 X_1) \dot{\theta}_1 + (T_1 X_5 - T_5 X_1) \theta_1 = 0 \end{aligned} \quad (1.22/15)$$

Das zahlenmäßige Ausrechnen der Werte wurde der Digitalrechenmaschine überlassen.

Die Strukturskizze der Programmierung für das Stabilitätsproblem von Einspurfahrzeugen zeigt Abb. 8.



$$(T_1 X_2 - T_2 X_1) \dot{\theta}_1 + (T_3 X_2 - T_2 X_3) \dot{\theta}_1 + (T_5 X_2 - T_2 X_5) \theta_1 + (T_4 X_2 - T_2 X_4) \dot{\theta}_2 + (T_6 X_2 - T_2 X_6) \theta_2 = 0$$

$$(T_1 X_2 - T_2 X_1) \dot{\theta}_2 + (T_1 X_4 - T_4 X_1) \dot{\theta}_2 + (T_1 X_6 - T_6 X_1) \theta_2 + (T_1 X_3 - T_3 X_1) \dot{\theta}_1 + (T_1 X_5 - T_5 X_1) \theta_1 = 0$$

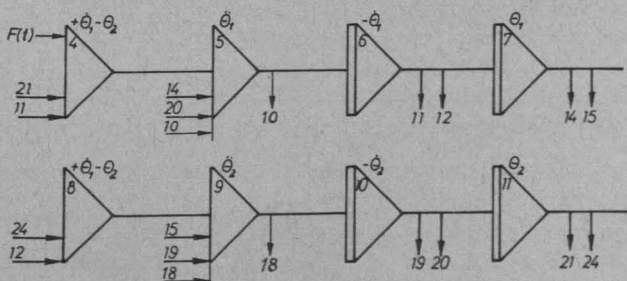


Abb. 8 Strukturskizze für Stabilitätsproblem eines Einspurfahrzeuges

Neben den Seitenneigungen sollte der Lenkeinschlag und das Lenkmoment dargestellt werden. Für ψ wurde die Gleichung (1.1/5) programmiert und mit den entsprechenden Verstärkern der Differentialgleichung gekoppelt; ebenso auch die Gleichung für das Lenkmoment M_L , für deren Ermittlung die Änderung des Dralles um die Spurlinie (aus 1.1/2) herangezogen wurde:

$$M_L = (J_{1v} \cos \sigma + J_{1uv} \sin \sigma) \ddot{\varphi}_1 - (J_{1uv} \cos \sigma + J_{1u} \sin \sigma) \ddot{\theta}_1 \quad (1.22/16)$$

Multipliziert man $-\dot{\psi} = \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1$ mit $-c_2$ und addiert sie zu (1.1/3) und beachtet, daß $c_2 - c_1 = l$ ist, so erhält man

$$l \cdot \dot{\varphi}_1 = v \psi + c_2 \dot{\psi}$$

und somit auch

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{v}{l} \dot{\psi} + \frac{c_2}{l} \ddot{\psi}$$

Nach Umformen mit (1.1/5)

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{\text{ctg } \sigma}{l} [v (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + c_2 (\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1)] \quad (1.22/17)$$

Eingesetzt und geordnet erhält man schließlich die hier brauchbare Gleichung für das Lenkmoment.

$$M_L = \frac{\cos \sigma}{l} (J_{1v} + J_{1uv} \cdot \text{tg } \sigma) [v (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + c_2 \ddot{\theta}_2] - [c_2 J_{1v} \cdot \text{ctg } \sigma + l J_{1u} \cdot \text{tg } \sigma + J_{1uv} (l + c_2)] \ddot{\theta}_1 \quad (1.22/18)$$

Von den entsprechenden Verstärkern werden die gewünschten Größen abgegriffen und von einem Schnellschreiber aufgezeichnet.

Eine ausführliche Diskussion der Diagramme und ein Vergleich mit den Fahrversuchen folgt in einem späteren Abschnitt. Hier seien lediglich als Aufzeichnungsbeispiele gebracht in Abb. 9 der zeitliche Ablauf von ψ , θ_2 und M_L für das *DKW*- und in Abb. 10 für das *BMW*-Motorrad jeweils in Normalausführung und in Abb. 11 für das *BMW*-Motorrad mit einer um 25% verkleinerten Schwerpunktshöhe des Vorderradsystems.

Alle Beispiele zeigen mit steigender Geschwindigkeit kleinere Ausschläge des Lenkeinschlages ψ und der Hinterradsystemseitenneigung θ_2 und größere Lenkmomente. Im Beispiel Abb. 11 ist der Schwingungsanteil so schwach gedämpft, daß er deutlich zu erkennen ist. Weiterhin wachsen, entsprechend einer kleinen positiven Wurzel der charakteristischen Gleichung, die Ausschläge von θ_2 bei Geschwindigkeiten über 30 km/h ständig an.

Abb. 12 zeigt den Bewegungsverlauf der *DKW*-Maschine bei 30 km/h

- a) mit den Anfangsbedingungen $\dot{\theta}_1$; $\dot{\theta}_2 = \text{const}$
- b) $\dot{\theta}_2 = \text{const}$ und
- c) mit einer halben Schwingung der Funktion $f(t) = 1 - \cos vt$ (Schwingungsdauer $T = 0,05 \text{ sec}$) als Störfunktion der ersten Differentialgleichung.

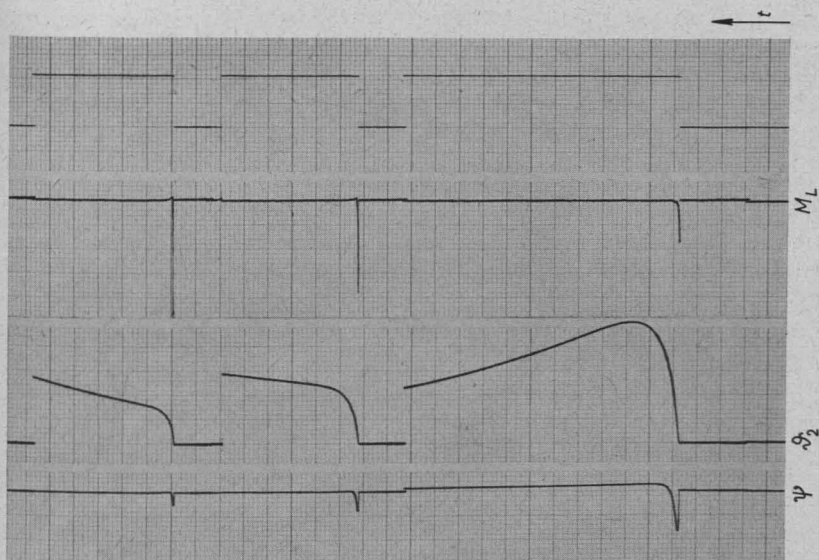


Abb. 9

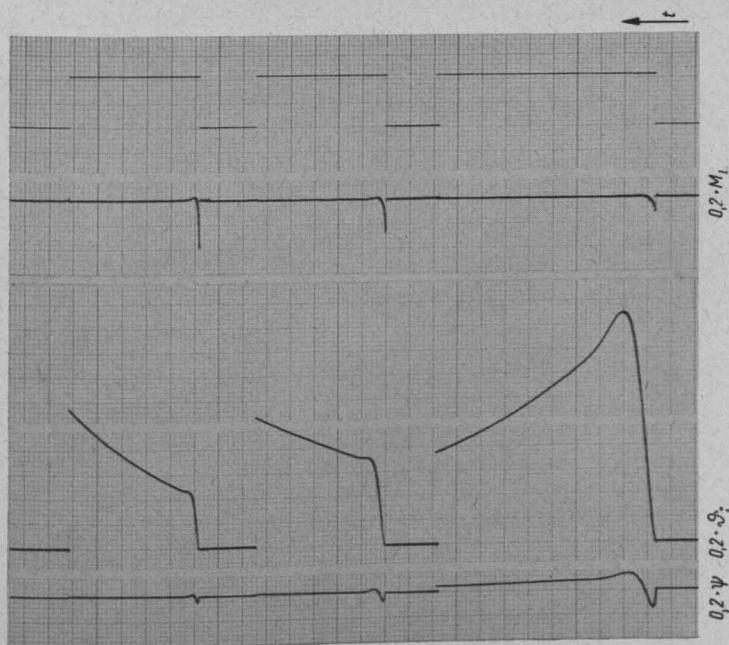


Abb. 10

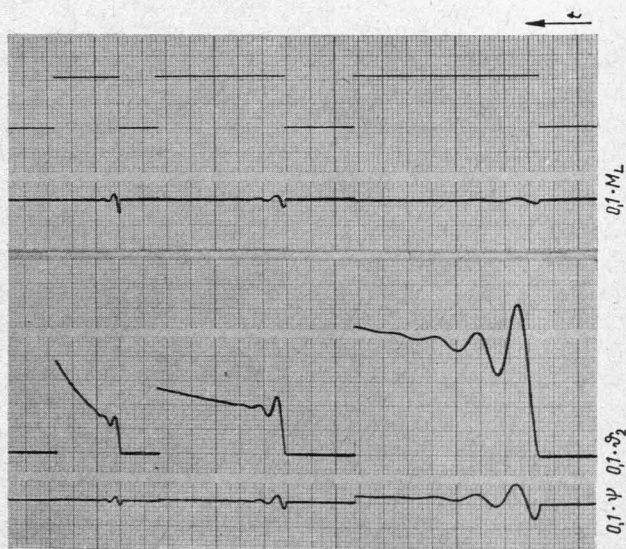


Abb. 11

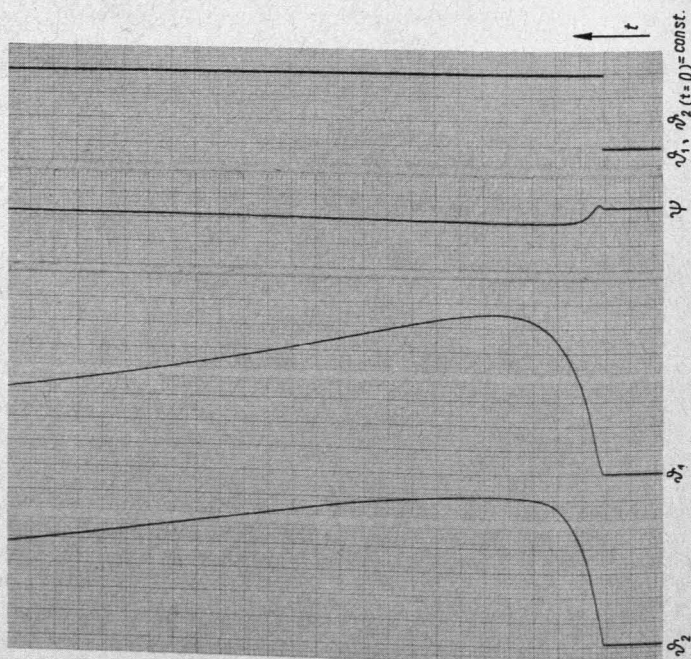


Abb. 12a

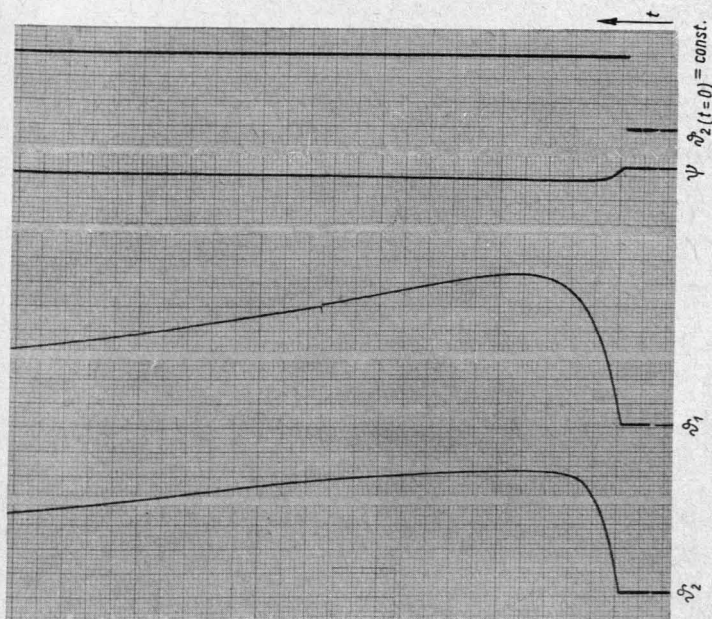


Abb. 12b

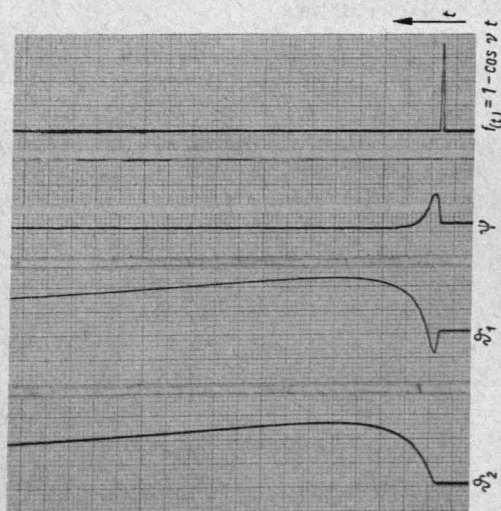


Abb. 12c

1.30 Die experimentelle Ermittlung der Baugrößen eines Einspurfahrzeugs

1.31 Die Räder

Die Trägheitsmomente werden durch Bifilarpendelmethode bestimmt. Bild 13a, b.

G = Gewicht des Rades

r = Fadenlänge

a = halber Fadenabstand, bei einer trapezförmigen Fadenanordnung ist a = halbe Mittellinie

T = Schwingungsdauer, mitteln aus drei Messungen von je 50 Schwingungen

$$J_1 = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \cdot G \cdot \frac{a^2}{r} \quad (1.3/1)$$

$$k_R^2 = \frac{J_1}{m_{R1}} \rightarrow k_R \quad (1.3/2)$$



Abb. 13a. Bestimmung des Trägheitsmoments durch Bifilarpendelmethode

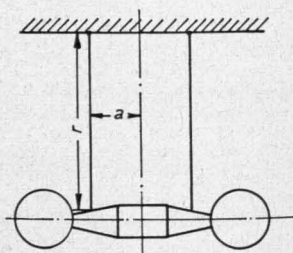


Abb. 13b. Prinzipskizze zur Bestimmung des Trägheitsmoments mittels der Bifilarpendelmethode

Diesem Trägheitsmoment ist beim Hinterrad, wenn der Motor die gleiche Drehrichtung hat, das des Motors hinzuzufügen bzw. anderenfalls abzuziehen. Beim Querläufer kann der Einfluß des Motors unberücksichtigt bleiben.

$$J_{\text{mot}} \simeq \frac{100}{4g} \cdot C \cdot Ne \cdot \left(\frac{100}{n} \right)^3 \cdot \frac{1}{\delta} \quad (1.3/3)$$

$$J_2 = J_1 \pm J_{\text{mot}} \cdot i_{\text{ges}} \quad (1.3/4)$$

$$m_{R2} = \frac{J_2}{K_R^2} \quad (1.3/5)$$

$$\delta \approx \frac{1}{100} \text{ (Ungleichförmigkeitsgrad)}$$

i_{ges} = Gesamtübersetzung Motor/Hinterrad

Ne = Nennleistung des Motors bei der Drehzahl n

Faktor C	Zylinderzahl	Zweitakt	Viertakt
	1	17	14
	2	7	2-4

1.32 Das Vorderradsystem

Die *Trägheitsmomente* werden ebenfalls mit Hilfe der Pendelmethode um drei Achsen bestimmt, die möglichst große Winkel zueinander haben sollen.

Für genaue Messungen sind gleichlange Pendelfäden, möglichst nicht zu große Schwingungsdauer und möglichst viele Nulldurchgänge beim Auspendeln wesentlich, Abb. 14.

An Meßwerten sind zu bestimmen (Abb. 15):

1. die Schwingungszeit
2. die Winkel $\alpha_1 \dots \alpha_3$ zwischen den Pendelachsen und einer Linie des Vorderradsystems (z. B. Holmachse),
3. die Lotlängen $a_1 \dots a_3$ von der Pendelachse zum Radmittelpunkt und
4. der Winkel τ zwischen der Vertikalen und der Bezugslinie im Vorderradsystem.



Abb. 14. Bestimmung des Trägheitsmoments des Vorderradsystems

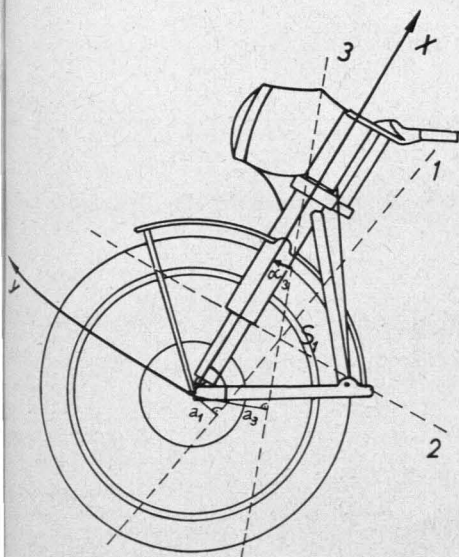


Abb. 15. Die notwendigen Meßgrößen

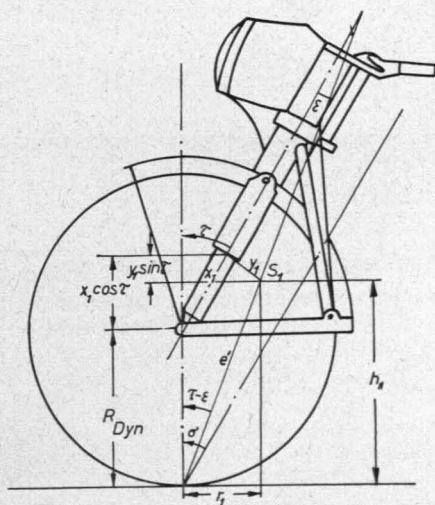


Abb. 16. Zur Berechnung des Schwerpunktes und der Trägheitsmomente des Vorderradsystems

Dabei sind Winkel, die durch Rechtsdrehung (im Uhrzeigersinn) auf kürzestem Wege in die Bezugslinie gedreht werden können, negativ (Vorzeichen beachten)!

$\alpha_1 \dots 3$	Winkel zwischen der Bezugslinie und Pendelachse. Dabei soll die Achse 1 die der Bezugslinie parallelste sein.
$a_1 \dots 3$	Lot von Radmittelpunkt auf Pendelachse
τ	Winkel zwischen der Bezugslinie und der Vertikalen
$h_{1,2}$	Schwerpunkthöhe [Index 1 Vorderradsystem Index 2 Hinterradsystem]
e	Lotlänge Aufstandspunkt-Pendelachse
$r_{1,2}$	Abstand Aufstandspunkt - Schwerpunkt auf der Spurlinie
$s_{1,2}$	Abstand Schwerpunkt und einer Parallelen zur Steuerachse durch den Radaufstandspunkt
$k_1 \dots 3$	Trägheitsarme um die Achsen $1 \dots 3$ im Radaufstandspunkt
R_{dyn}	Dynamischer Radhalbmesser

$$x_1 = \frac{a_3 \cos \alpha_1 - a_1 \cos \alpha_3}{\sin (\alpha_1 - \alpha_3)} \quad (1.3/6)$$

$$y_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 (x_1 - a_1 / \sin \alpha_1) \quad (1.3/7)$$

$$h_1 = R_{\text{dyn}} + x_1 \sin \tau + y_1 \cos \tau \quad (1.3/8)$$

$$r_1 = x_1 \cdot \sin \tau - y_1 \cos \tau \quad (1.3/9)$$

$$e' = \sqrt{h_1^2 + r_1^2} \quad (1.3/10)$$

$$s_1 = e' \sin (\sigma - \tau + \varepsilon) = h_1 \sin \sigma - r_1 \cos \sigma \quad (1.3/11)$$

$$\operatorname{tg} (\tau - \varepsilon) = r_1 / h_1 \rightarrow \varepsilon \quad (1.3/12)$$

$$e_{1 \dots 3} = e' \sin (\varepsilon - \alpha_{1 \dots 3}) \quad (1.3/13)$$

Aus den Schwingungszeiten werden, wie oben beschrieben, die Trägheitsarme $k_{s1} \dots 3$ bestimmt. (Abb. 17)

$$k_{1 \dots 3}^2 = k_{s1 \dots 3}^2 + e_{1 \dots 3}^2 \quad (1.3/14)$$

Jetzt wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt mit der Achse 1 als x -Achse und einer y -Achse mit dem positiven Ast in Fahrtrichtung zeigend. Nullpunkt im Radaufstandspunkt.

$$a_{11} = k_1^2 \quad (1.3/15)$$

$$a_{22} = k_1^2 \operatorname{ctg} \beta_2 \cdot \operatorname{ctg} \beta_3 + \frac{k_2^2 \sin 2 \beta_3 - k_3^2 \sin 2 \beta_2}{2 \sin (\beta_2 - \beta_3) \sin \beta_2 \sin \beta_3} \quad (1.3/16)$$

$$a_{12} = \frac{1}{\sin \beta_2} \left\{ k_2^2 - \frac{1}{2} [(a_{11} + a_{22}) + (a_{11} - a_{22}) \cdot \cos 2 \beta_2] \right\} \quad (1.3/17)$$

a_{12} Deviationsmoment kann positiv, null oder negativ werden.

Gebraucht werden nun die Trägheitsarme für die senkrechte und horizontale Achse durch den Aufstandspunkt. Der Winkel zwischen der x -Achse und der Vertikalen ist $\beta_y = \tau + \alpha$.

$$k_{v,u}^2 = \frac{1}{2} \{ (a_{11} + a_{22}) \mp [(a_{11} - a_{22}) \cos 2\beta_v + 2a_{12} \sin 2\beta_v] \} \quad (1.3/18)$$

$$J_{1v,u} = k_{v,u}^2 \cdot m_1 \quad (1.3/19)$$

$$J_{1vu} = -\frac{m_1}{\sin 2\beta_v} \left\{ k_1^2 - \frac{1}{2} [(k_v^2 + k_u^2) + (k_v^2 - k_u^2) \cos 2\beta_v] \right\} \quad (1.3/20)$$

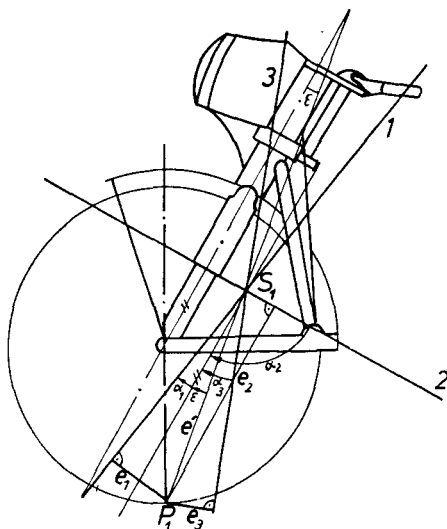


Abb. 17. Zur Berechnung des Schwerpunktes und der Trägheitsmomente des Vorderradsystems

Es empfiehlt sich, die Trägheitsellipse aufzuzeichnen und die errechneten Werte zu kontrollieren. Dabei ist $1/k_x = ix =$ Achsabschnitt. Die Hauptträgheitsachsen errechnet man aus:

$$k_{x,y}^2 = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22}] \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2} \quad (1.3/21)$$

$$\tan^2 \gamma = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad (1.3/22)$$

$\gamma =$ Winkel zwischen der Ellipsenhauptachse und der Achse 11. Ferner wird benötigt:

$$r = -a = \frac{m_1 r_1 l}{m_2 r_2 - m_1 r_1} = \frac{l}{[(m_2 r_2 / m_1 r_1) - 1]} \quad (1.3/23)$$

1.33 Das Hinterradsystem

Der *Schwerpunkt* wird durch die Wiegemethode bestimmt. Es ist darauf zu achten, daß der Fahrer seine Haltung während der Messung nicht verändert und eine Vorrichtung es ihm ermöglicht, die gleiche Haltung auch beim Auspendeln der Trägheitsmomente einzunehmen, Abb. 18.

G_{ges} = Gesamtgewicht des Hinterradsystems

G_h = Belastung der Waage durch das Hinterrad

l = horizontaler Abstand Aufstandspunkt — Aufhängung

$$r_2 = l \cdot \frac{G_{\text{ges}} - G_h}{G_{\text{ges}}} \quad (1.3/24)$$

Anheben des Hinterradsystems um einen Winkel $\varphi \approx 30^\circ$ (bei kleineren Winkeln werden die Meßfehler zu groß).

Messen der neuen Werte G_h' , l' und daraus r_2'

$$r_2' = l' \cdot \frac{G_{\text{ges}} - G_h'}{G_{\text{ges}}} \quad (1.3/25)$$

$$h_2 = r_2 \operatorname{ctg} \alpha - \frac{r_2'}{\sin \alpha} + R_{\text{dyn}} \quad (1.3/26)$$

$$s_2 = r_2 \cos \sigma + h_2 \sin \sigma \quad (1.3/27)$$

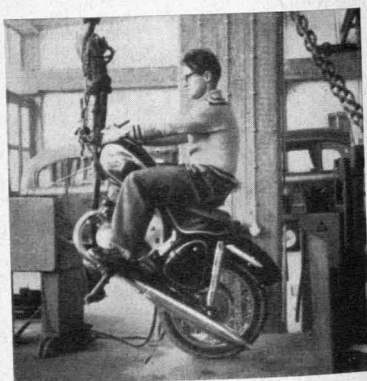


Abb. 18. Bestimmung des Schwerpunkts nach der Wiegemethode

Die *Trägheitsmomente* werden mit Hilfe der Bifilarpendelmethode oder eines Drehtisches bestimmt. Bei der ersten Methode muß eine Plattform an Fäden bzw. Draht aufgehangen werden und, wie auch beim Drehtisch, das Eigentragheitsmoment einschließlich der verwendeten Stützen ermittelt werden. Das mit dem Fahrer besetzte Kraftrad wird bei ausgebautem Vordersystem so auf dem Tisch befestigt, daß die Spurlinie des Fahrzeugs durch die Mitte bzw. durch den Drehpunkt der Pendelplatte geht. Außer der normalen vertikalen Stellung wird das Trägheitsmoment auch für die horizontale und eine beliebige Achse ermittelt, die mit dieser einen Anstellwinkel $\varphi = 30^\circ$ bildet. Man beachte, daß beim Auspendeln über der Mitte des Tisches der Punkt des Reifens steht, der bei einer Auffahrt mit dem Winkel φ den Boden berühren würde. (Abb. 19, a, b, c).

Beim Pendelverfahren addieren sich die Trägheitsmomente, beim Drehtisch wird das Eigentragheitsmoment wie folgt festgelegt: Das Trägheitsmoment einer Masse (Gewichtsstück) wird errechnet:

$$J_M = \frac{G}{g} \cdot r^2 \quad (1.3/28)$$

r = Abstand vom Mittelpunkt.

Dann ist das Trägheitsmoment des Tisches:

$$J_1 = J_M \frac{T_1^2}{T_M^2 - T_1^2} \quad (1.3/29)$$

T_1 = Schwingungszeit des Tisches und der Stützen

T_M = Schwingungszeit wie oben zusätzlich mit Vergleichsmasse

Die Motorradträgheitsmomente werden dann:

$$J_{2v,u,\varphi} = J_1 \frac{(T_{v,u,\varphi})^2 - T_1^2}{T_1^2} \quad (1.3/30)$$

$$(k_{v,u,\varphi,vu})^2 = \frac{J_{2v,u,\varphi,vu}}{m_2} \quad (1.3/31)$$

$$J_{2vu} = -\frac{m_2}{\sin 2\varphi} \left\{ k_\varphi^2 - \frac{1}{2} [(k_v^2 + k_u^2) - (k_v^2 + k_u^2) \cos 2\varphi] \right\} \quad (1.3/32)$$

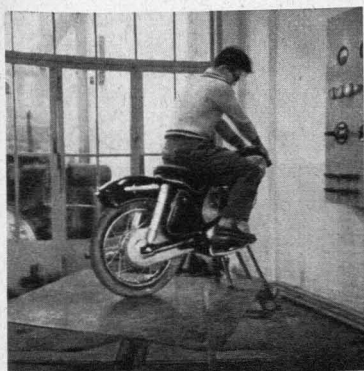


Abb. 19a

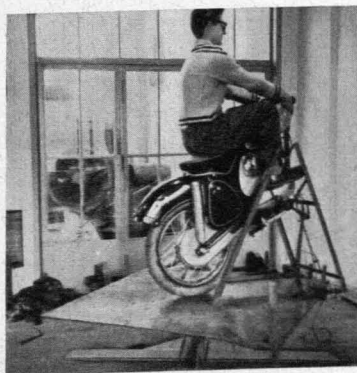


Abb. 19b



Abb. 19c. Bestimmung des Trägheitsmoments mit einem Drehtisch

Auch hier empfiehlt es sich, zur Kontrolle die Trägheitsellipsen aufzuzeichnen (1.3/21) und (1.3/22).

Die Lage der Ellipsen z. B. bei einem 250 ccm-Motorrad zeigt Abb. 20.

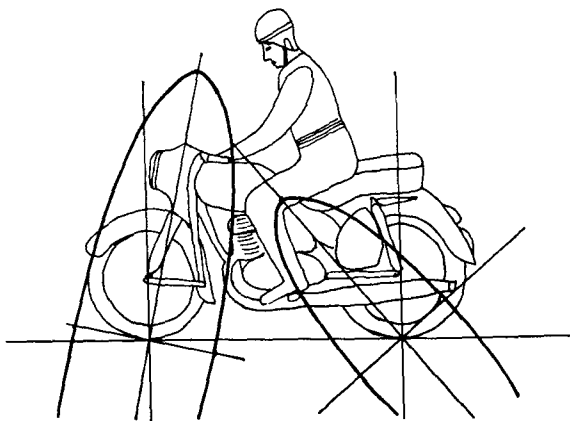


Abb. 20. Die Lage der Trägheitsellipsen bei der DKW RT 250 VS

Die so erhaltenen Baugrößen müssen für die Gleichungen dimensionslos gemacht werden. Die Beziehungen sind unter Bezeichnungen zu ersehen. Diese Grundgrößen für einen *Vespa*-Roller, eine *Dürkopp MD 150*, eine *BMW R 51/3* und eine *DKW RT 250 VS* zeigt Abb. 21 (umseitig).

2.000 Die Überprüfung der Theorie durch Fahrversuche

Das Ziel der Untersuchung soll sein, rechnerisch das Fahrverhalten einer Maschine zu ermitteln bzw. durch Berechnungen den Bewegungsablauf einer gegebenen Maschine in einer vorgegebenen Richtung zu ändern.

Die Theorie und die Lösungsmöglichkeiten wurden in den vorhergehenden Abschnitten gezeigt. Bevor an Hand der aufgestellten Gleichungen gültige Aussagen gemacht werden können, muß gezeigt werden, daß die theoretischen Betrachtungen auch dem tatsächlichen Fahrverhalten eines Einspurfahrzeuges entsprechen und die gemachten Vernachlässigungen vertretbar sind.

Um „gezielte“ Versuche fahren zu können, also Änderungen an der Maschine anzubringen, die den Bewegungsablauf der Hinterradebene und des Lenkeinschlages derart ändern, daß ein deutlicher Unterschied zum Motorrad in Normalausführung auftritt, war es nötig, Vorberechnungen durchzuführen.

2.100 Der Versuchsaufbau

Bei den Versuchen soll der Lenkausschlag und die Neigung des Hinterradsystems aufgezeichnet werden, ohne daß der normale Fahrablauf durch Versuchseinrichtungen gestört wird. Aus diesem Grunde wurde davon abgesehen, einen Meßwagen mit einer Bezugsebene anzuhängen und die Meß-

Bezeichnungen der Grundgrößen		<i>Vespa-Roller</i>	<i>Dürkopp MD 150</i>	<i>BMW R 51/3</i>	<i>DKW RT 250 VS</i>
Massenverhältnis	M	0,0897	0,1531	0,1717	0,1661
reduziertes Trägheitsmoment um die U Achse (V-Rad)	K_{1u}	0,3780	0,4301	0,4218	0,4059
reduziertes Trägheitsmoment um die V Achse (V-Rad)	K_{1v}	0,1429	0,1762	0,1631	0,1895
reduziertes Zentrifugalmoment in der UV Ebene (V-Rad)	K_{1uv}	0,2315	0,2203	0,2190	0,2605
reduziertes Trägheitsmoment um die U Achse (H-Rad)	K_{2u}	0,7442	0,5907	0,5012	0,5193
reduziertes Trägheitsmoment um die V Achse (H-Rad)	K_{2v}	0,3945	0,3844	0,4036	0,4067
reduziertes Zentrifugalmoment in der UV Ebene (H-Rad)	K_{2uv}	0,4488	0,4052	0,3894	0,4222
reduzierter Abstand des Schwerpunktes von der Steuerachsparellen durch den Aufstandspunkt (Vorderrad)	S_1	0,0379	0,0977	0,0888	0,0792
reduzierter Abstand des Schwerpunktes von der Steuerachsparellen durch den Aufstandspunkt (Hinterrad)	S_2	0,4118	0,5488	0,5021	0,4941
reduzierte Schwerpunkthöhe des Vorderrad-Systems	H_1	0,3095	0,3822	0,3790	0,3578
reduzierte Schwerpunkthöhe des Hinterrad-Systems	H_2	0,5132	0,5442	0,3846	0,3081
reduzierter Nachlauf	C_1	0,0725	0,0814	0,0559	0,0822
reduzierter Abstand des Durchstichpunktes der Steuerachse vom hinteren Aufstandspunkt	C_2	1,0725	1,0814	1,0559	1,0822
reduzierter waagerechter Abstand des Schwerpunktes vom Aufstandspunkt (Vorderrad)	R_1	0,0597	0,0884	0,0923	0,1000
reduzierter waagerechter Abstand des Schwerpunktes vom Aufstandspunkt (Hinterrad)	R_2	0,2668	0,3357	0,3664	0,3296
reduzierter Trägheitshalbmesser des Rades	K_R	0,3108	0,3369	0,3379	0,3542
reduzierte Masse des Vorderrades	M_{R1}	0,0261	0,0697	0,0578	0,0609
reduzierte Masse des Hinterrades mit Motor	M_{R2}	0,0466	0,0908	0,0578	0,0870
Steuerwinkel		21	27,5	26,9	28

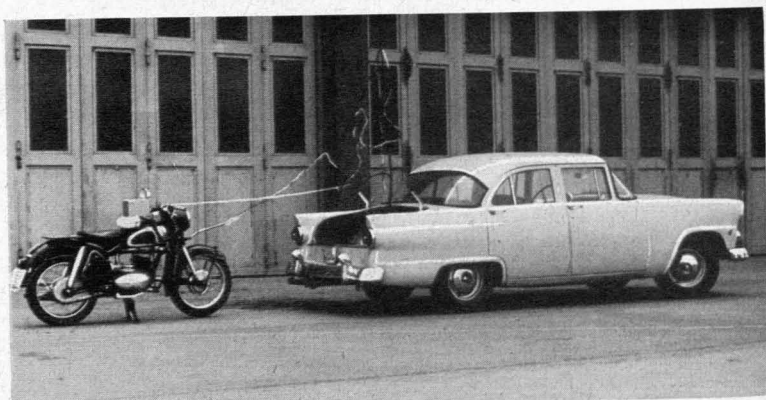


Abb. 22. Die Gesamtansicht der Versuchseinrichtung

geräte auf dem Fahrzeug selbst mitzuführen. Die gesamte Versuchseinrichtung zeigt Abb. 22: Einen vorausfahrenden Personenwagen mit den Geräten und, über ein Kabel verbunden, das zu messende Motorrad, auf dem sich neben dem Fahrer nur die Winkelaufnehmer befinden. Das Kabel ist am Wagen an einer hohen Stange befestigt und wird mittels einer Feder immer stramm gehalten, wodurch ein Überfahren der Verbindung vermieden werden soll. Zwischen Meßkasten und Kabel ist am Motorrad ein 16- und ein 5-poliger Stecker eingebaut, der sich selbsttätig im Bedarfsfalle löst. Besondere Sorgfalt wurde darauf verwendet, daß das Kabel die Bewegung des Fahrzeugs nicht behindert.

Vorversuche zeigten, daß ein „Abschleppseil“ das Einhalten eines bestimmten Abstandes erleichtert. Die Maschine wird über ein Nylonseil mittig gezogen. Kurz vor dem Versuch läßt der Fahrer das Seil los, das dann, um

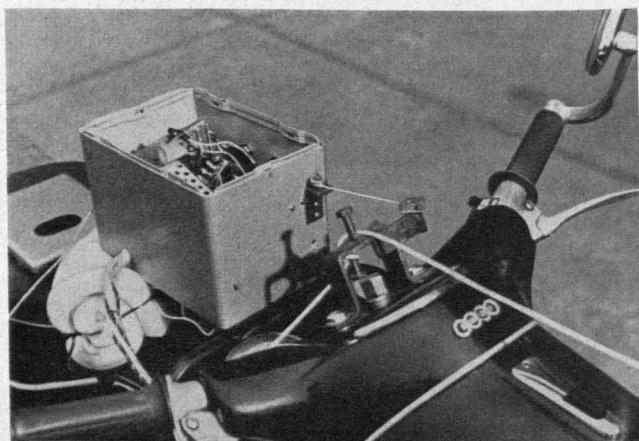


Abb. 23. Zugvorrichtung und Anlenkung der Potentiometerbetätigung

wieder ein Überfahren zu verhindern, selbsttätig ins Fahrzeug eingezogen wird. Ein Auffahren auf den Personenwagen würde das Vorderrad blockieren. Um dieses zu verhindern, wurde, ähnlich wie bei den Stehertaschinen, eine Fahrrolle angebaut. Für die Verständigung zwischen Wagen und Motorrad wurden zwei verschiedenfarbige Lampen installiert.

Die Zeitdauer des Freihändigfahrens wurde vom Wagen aus auf den Meßstreifen eingetastet.

Abb. 23 zeigt den Meßkasten, die Vorrichtung für das Zugseil und die Befestigung des Perlonfadens, der das Potentiometer bewegt.

2.200 Die Meßgrößenaufnehmer

Zur Anzeige des Lenkereinschlages ψ dient ein Potentiometer, das durch eine Zugvorrichtung gedreht und von einer Feder immer wieder in die Null-Lage zurückgeholt wird. Die Linearität der Anzeige wurde überprüft. An dem Potentiometer liegen 8 Volt, die von einer Autobatterie abgenommen werden. Geeicht wird die Anzeige durch zwei Bügel, von denen einer nur die Geradeausstellung des Lenkers und der andere gleichen Einschlag nach beiden Seiten garantiert. Abb. 24a, b.

Als weitere Meßgröße wurde der Winkel ϑ_2 des Hinterradsystems gegen die Vertikale gewählt.

Zur Anzeige einer Seitenneigung wird eine Bezugsachse benötigt, die ihre Lage im Raum während der Dauer des Versuches beibehält. Flüssigkeitsspiegel, Libellen, Pendel usw., die dies ortsfest leisten, versagen auf ungleichförmig oder mit Kursänderung bewegten Fahrzeugen. Es liegt nahe, hier den schnellen symmetrischen Kreisel zu verwenden, und zwar den Kreisel mit drei Freiheitsgraden und lotrechter Figurenachse, welcher die wahre Bezugsachse so genau angibt, wie sie selbst in der wahren Lotlinie gehalten werden kann. Ein Pendelkreisel, wie der hier verwendete, kardanisch aufgehängt und mit einem Kreiselkörperschwerpunkt, der tiefer liegt als der Gehäusemittelpunkt, wird wegen seiner großen dynamischen Trägheit zweifellos weniger leicht gestört werden können als ein einfaches Pendel. Dennoch sollte die Konstruktion des Gerätes theoretisch auf Störeinflüsse überprüft und die Anzeigegenauigkeit auf einem Schütteltisch bei verschiedenen Frequenzen ermittelt werden, da Reibung, Erddrehung, Beschleunigung des Fahrzeugs usw. ihn allmählich aus der anfänglich eingestellten Lotlinie abweichen lassen könnten.

Ein schneller symmetrischer Kreisel wird gewählt, weil bei gleich starken Stößen der Präzessionskegel um so kleiner wird, je größer der Betrag des Drehimpulses ist. Es ist also zu erwarten, daß ein Kreisel mit hoher Umdrehungszahl, selbst auf heftige Stöße, die einen langsamlaufenden Kreisel stark auslenken würden, nur mit kleinen Erzitterungen antwortet. Auf einen schweren Kreisel wird durch die Schwerkraft zusätzlich eine besonders wichtige Art des Zwanges ausgeübt, die ein zusätzlich lotrechtes Einstellen der Figurenachse gewährleistet. Es verschwindet dann das Schweremoment und eben auch die zur Erhaltung einer regulären Präzession erforderliche Zwangsdrehkraft. Außerdem ist ein stehender Kreisel stabil, solange seine Drehgeschwindigkeit einen gewissen Kleinstwert überschreitet, was bei dem vorhandenen schnellen Kreisel gegeben ist.

Während die Lagerreibung bei einem normalen kardanischn aufgehängten schnellen symmetrischen Kreisel eine Änderung seiner Bewegung und der Präzessionsgeschwindigkeit hervorruft, kann die Reibung bei einem praktisch ohne Präzessionskegel umlaufenden Kreisel vernachlässigt werden.

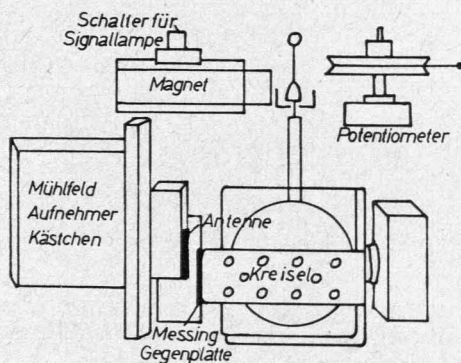


Abb. 24a. Winkelaunehmermeßkasten

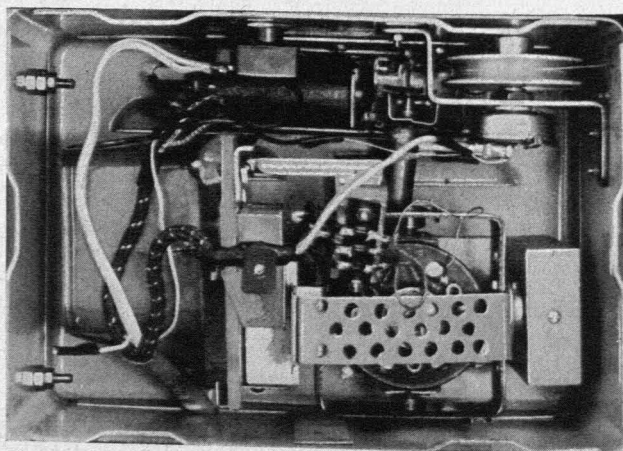


Abb. 24b

Die Masse der Kardanringe ist bei der vorliegenden Ausführung praktisch ohne Bedeutung, da äußerer und innerer Ring durch ihre Massenträgheit eine lotrechte Figurenachse eher gewährleisten als stören. Infolge der kardanischn Aufhängung und der Stabilität der Kreiselbewegung wirken keine Störeinflüsse auf die Ringe.

Im Vergleich mit den anderen Aufbaumöglichkeiten eines Kreisels eignet sich diese am besten, um eine lotrechte Bezugsachse darzustellen. Als Kreisel

wird ein Dreiphasen-Asynchronmotor mit 7000 U/min verwendet (Abb. 25). Das Schema eines solchen Kreiselpendels mit kardanischer Aufhängung zeigt Abb. 26.

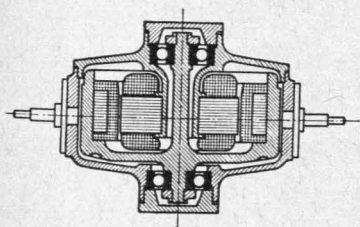


Abb. 25. Motor-Standardtype für Kreiselgeräte

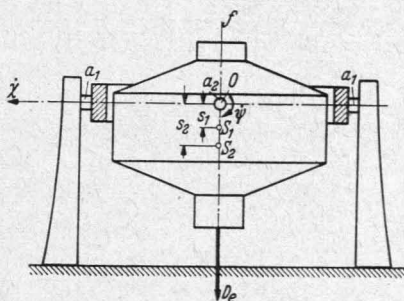


Abb. 26. Kreiselpendel im Kardanhänge

Im weiteren ist zu untersuchen, welche äußeren Einflüsse die Kreisbewegung beeinträchtigen können.

Gleichförmige geradlinige Bewegungen des Aufhängepunktes 0 sind nach dem Grundgesetz der Mechanik ohne Einfluß. Wird dieser jedoch beschleunigt, so treten wegen der Massenträgheit des Systems Momente auf. Gegenüber der großen scheinbaren, dynamischen Trägheit aller schnelllaufenden Kreisel kommt ihre wirkliche Trägheit und die Trägheit ihres Gehänges bei den sehr langsamen Bewegungen χ und ψ der Figurenachsen zahlenmäßig überhaupt nicht in Betracht. Die durch die Beschleunigungsmomente bedingten Winkelausschläge, wie die Erddrehung, rufen Kreiselmomente hervor, die bei größeren Beschleunigungen zu berücksichtigen sind. Diese Überlegungen gelten für ein χ, ψ -System, dessen Orientierung nach den Himmelsrichtungen fest ist, also nicht für ein Kreiselpendel, dessen Kardanachse a_1 sich etwa mit dem Fahrzeug dreht. Diese Schwierigkeit läßt sich aber dadurch beheben, daß man den Unterschied zwischen den beiden Achsen a_1 und a_2 verwischt, indem man $s_1 G_1 = s_2 G_2$ macht.

Soll — wie z. B. bei einem Flugzeug mit seinen hohen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen — ein solches Gerät auch noch bei Kurvenflug genaue Lotrichtung (oder einen künstlichen Horizont) anzeigen, so bedarf es komplizierter Mehrkreiselgeräte mit ausgeklügelten Dämpfungssystemen. Für Landfahrzeuge mit relativ kleinen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen und etwa geradliniger Fahrtrichtung sind die Mißweisungen zu vernachlässigen. Das vorliegende Kreiselgerät ist somit theoretisch für die vorgegebenen Versuche durchaus geeignet.

Schwierigkeiten bereitete das Abnehmen der Winkeländerung zwischen der Kreiselachse und der Hinterradebene, da jede Anlenkung eines Zeigers und selbst leichtgängige Potentiometer ein Moment auf den Kreisel ausüben und diesen sofort auslenken. So wurde das berührungslos arbeitende, rückwirkungs-freie und trägheitslose Meßverfahren nach Dr. Mühlfeld angewendet, das am Institut für Fahrzeugtechnik der T. H. Braunschweig entwickelt worden ist [21]. Dabei ist, wie auf Abb. 24a, b zu sehen, eine Messingplatte mit dem

äußeren Kardanring verbunden. Dieser gegenüber steht, isoliert befestigt, eine Antenne. Beide Platten bilden einen Drehkondensator, dessen Kapazität von dem relativen Verdrehungswinkel abhängt und sich linear mit dem Drehwinkel ändert. Der Kondensator ist Bestandteil eines elektrischen Schwingungskreises, der von einem einstellbaren Hochfrequenzgenerator erregt wird. Bei konstanter Erregerfrequenz und Verdrehung der Platten gegeneinander, damit Veränderung der Kapazität C des Kondensators, bildet die Funktion der Spannung $U = f(C)$ eine Resonanzkurve. Zweckmäßigerweise wählt man als

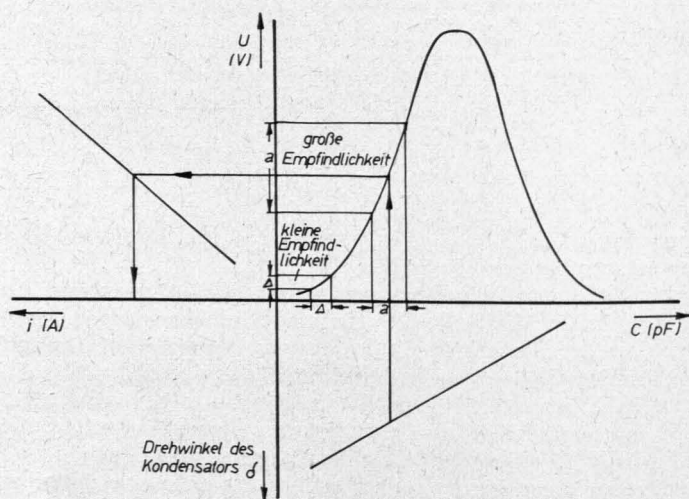


Abb. 27. Prinzip des trägheitslosen Abstandmeßgerätes

Arbeitsbereich immer den etwa linearen Bereich a , der die größte Empfindlichkeit bietet. Die demnach mit der Kapazitätsänderung veränderliche Spannung wird auf das Gitter einer Verstärkerröhre gegeben und damit zur Steuerung des Anodenstromes herangezogen. Die Abhängigkeit von Gitterspannung U_g und Anodenstrom i_A ist bei der verwendeten Röhre ebenfalls linear (Abb. 27). Geeicht wird die Anzeige der Seitenneigung durch Auslenkung des Kreisel um einen bestimmten Winkel. Beide Aufzeichnungen überlagerte bei großer Verstärkung infolge mechanischer Erschütterungen eine hochfrequente Schwingung, die elektrisch mit einem Tiefpaß abgeschnitten wurde.

2.300 Die Versuchsfahrten und deren Ergebnisse

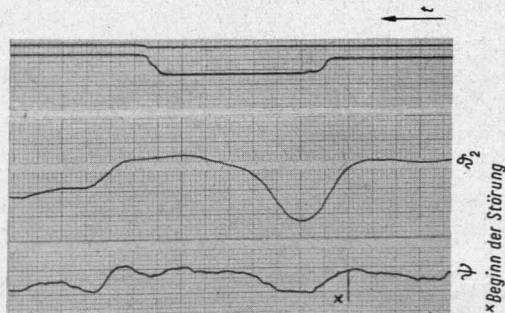
Als Versuchsstrecke wurde eine abgesperrte Betonstraße ausgesucht, die teilweise durch einen Geländeeinschnitt führte. Dadurch war es möglich, den Einfluß von Seitenwind weitgehend auszuschalten (Abb. 28).

Entsprechend den verschiedenen Anfangsbedingungen der Analogie-rechnungen wurde auch hier versucht, diese darzustellen. Die Geradeausfahrt wurde zuerst durch eine konstante Anfangswinkelgeschwindigkeit der Hinter-



Abb. 28. Die Versuchsstrecke

radsystemseitenneigung, $+\dot{\vartheta}_2 = \text{const}$, gestört. Die Aufzeichnung zeigt z. B. bei einer Fahrt mit der *DKW*-Maschine bei 30 km/h, wie die des Analogrechners, einen Ausschlag des Hinterradsystems ϑ_2 und des Lenkeinschlages ψ in gleicher Richtung und ein Zurückpendeln in die Null-Lage. (Abb. 29) (Die entsprechenden Aufzeichnungen der Analogierechenmaschine siehe Abschnitt 1.222.)

Abb. 29. Bewegungsablauf bei einer Störung $\dot{\vartheta}_2 = \text{const}$

Die Amplitudenverhältnisse: Neigung Hinterradsystem zu Lenkeinschlag differierten bei mehreren Fahrten stark. Hierfür konnte durch gleichzeitige Filmaufnahmen von Fahrer und Motorrad eine Erklärung gefunden werden.

Beim Versuch des Fahrers, dem Hinterradsystem eine Anfangsgeschwindigkeit aufzuzwingen, knickt sein Oberkörper gegen das Fahrzeug ein. (Verständlich, wenn man bedenkt, daß bei jeglicher Bewegung der Gesamtschwerpunkt erhalten bleiben muß, also bei einer Seitenneigung des Oberkörpers die Maschine sich zur anderen Seite neigt, da auf die umhüllende Luft keine Reaktionskräfte übertragen werden können.) Wegen der unterschiedlichen Einknickwinkel variieren die Amplituden so stark.

Um diesen Effekt zu verringern und auch zum Vergleich mit dem theoretischen Bewegungsablauf, wurde ein Impuls auf den Lenker gegeben (dies entspricht einer Anfangsbedingung $\psi \sim -\dot{\vartheta}_2, \dot{\vartheta}_1 = \text{const}$), indem dieser mit

der Hand angezupft wurde. Jetzt konnte der Fahrer seinen Oberkörper besser unter Kontrolle halten, ein Einknicken war aber dennoch nicht ganz zu vermeiden. Der Bewegungsablauf ist dann folgender: Der Lenker wird impulsartig z. B. nach rechts ausgelenkt. Durch die auftretenden Zentrifugalkräfte neigt sich die Maschine nach links und, wie beschrieben, schlägt das Vorderradsystem auch nach eben dieser Seite ein, wodurch sich die Maschine wieder aufrichtet. Bis hierhin wäre der theoretische Ablauf gegeben.

Die Maschine hat sich jedoch als Reaktion auf den Impuls so rasch zur Seite geneigt, daß der Oberkörper des Fahrers einknickte und jetzt, nachdem die Maschine wieder senkrecht steht, immer noch einen Winkel mit der Hinterradebene bildet. Somit ist eine neue Störung gegeben, die sich in einem Durch-

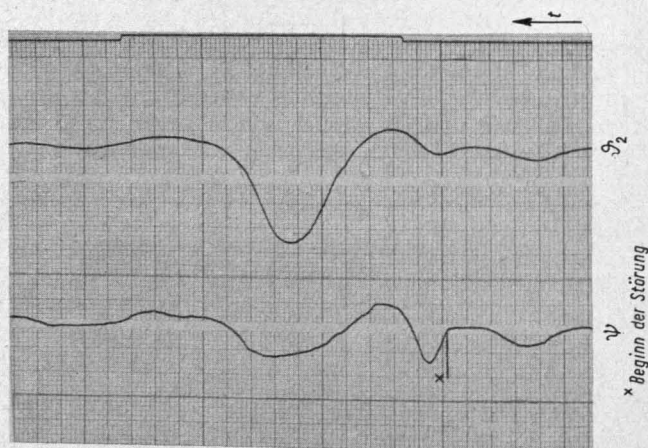


Abb. 30. Bewegungsablauf bei einer Störung: Impuls auf Lenker; ohne Halterung, die eine Bewegung des Fahrers relativ zum Fahrzeug verhindert

pendeln der Maschine auf die rechte Seite, einem Rechtseinschlag des Lenkers und ein darauf folgendes Aufrichten der Maschine widerspiegelt. Der Vorgang geht relativ langsam, so daß Oberkörper und Hinterradsystem wieder in eine Ebene kommen und der Ausgangszustand wieder erreicht ist (Abb. 30).

Bei dieser Versuchsanordnung folgen zwei Störungen hintereinander, die beide zwar den theoretischen Bewegungsablauf kennzeichnen, aber auch hier wegen des unterschiedlichen Einknickwinkels für eine Auswertung nicht ausreichend erschienen.

Daraufhin wurde auf dem Motorrad eine Rohrhalterung angebaut, die den Oberkörper des Fahrers relativ zum Motorrad in etwa festhält (Abb. 31) und als Störung ein Impuls auf den Lenker gegeben.

Die Aufzeichnungen dieser Versuchsfahrten ergaben nun auch Kurven, die im Verlauf und im Amplitudenverhältnis den Aufzeichnungen der Analogiemaschine entsprechen und reproduzierbar sind.



Abb. 21. Der Fahrer ist in die Rohrhalterung eingeklemmt

Gefahren wurde in der ersten Versuchsgruppe mit

1. einer *DK RTW 250 VS* in Normalausführung
2. mit um 25 % vergrößertem Trägheitsmoment des Vorderrades*
3. mit um 25 % vergrößertem Trägheitsmoment des Hinterradsystems* um die Spurlinie und
4. mit einer *BMW-R 51/2* in Normalausführung.

Von jeder Variation wurde eine hinreichende Anzahl Versuche durchgeführt und unter Berücksichtigung der entsprechenden Werte der Eichung das Amplitudenverhältnis: Neigung Hinterradsystem zu Lenkeinschlag bezogen auf ein $\psi = 3^\circ$ und die auftretenden Frequenzen ermittelt. Abb. 32–39 zeigen eine Auswahl der Aufzeichnungen.

Aus der Grundgesamtheit der Meßwerte wurden die statistischen Meßzahlen, der Mittelwert und das Streuungsmaß berechnet, um den Unterschied zwischen den theoretischen Werten und den Ergebnissen der Versuchsfahrten zu prüfen. Als Mittelwert wurde der Durchschnittswert z. B. für die Frequenzen nach

$$\bar{\omega} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i \quad (2.3/1)$$

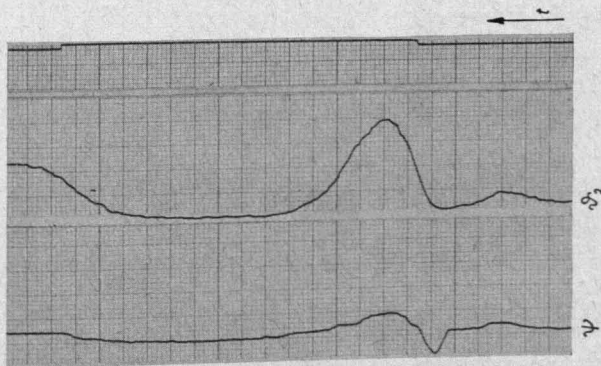


Abb. 32. Versuchsfahrt mit der DKW 250 VS-N bei 30 km/Std

* Die größeren Trägheitsmomente wurden durch Zusatzmassen in entsprechendem Abstand dargestellt.

Abb. 33. Versuchsfahrt
mit der DKW 250 VS-N bei 60 km/Std.

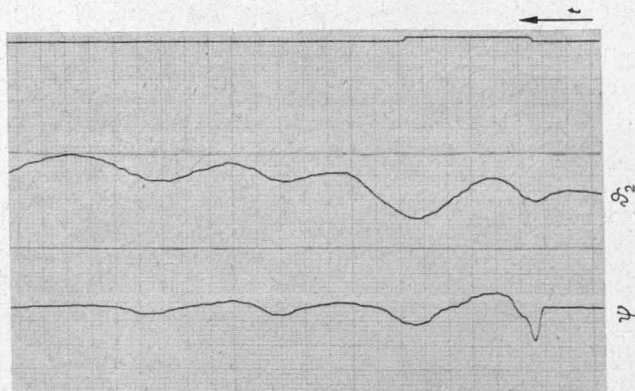


Abb. 34 Versuchsfahrt
mit der DKW 250 VS
bei 30 km/Std.
Das Trägheitsmoment
des Vorderrades wurde
um 25 % seines Normal-
wertes vergrößert



Abb. 35. Versuchsfahrt mit der
DKW 250 VS bei 60 km/Std.
Die gleiche Variation wie oben

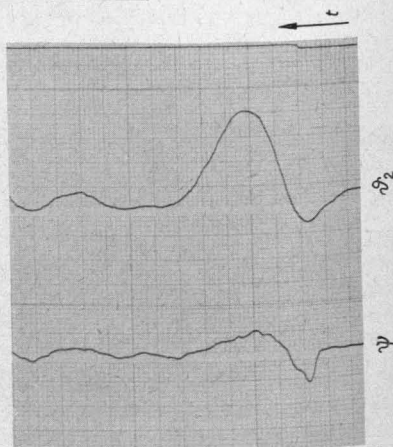


Abb. 36. Versuchsfahrt mit der DKW 250 VS
bei 30 km/Std. Das Trägheitsmoment des
Hinterradsystems um die Spurlinie (K_{2u}) wurde
um 25 % seines Normalwertes vergrößert

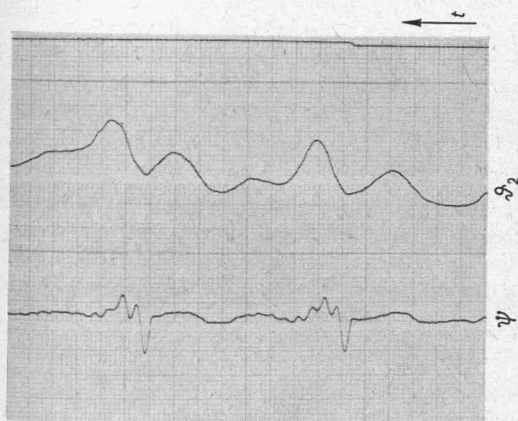


Abb. 37. Versuchsfahrt mit der
DKW 250 VS.
Die gleiche Variation wie oben

Abb. 38.
Versuchsfahrt
mit der
BMW 51/2
bei 30 km/Std.

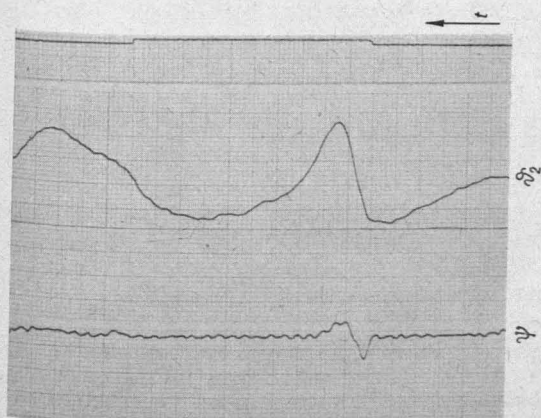


Abb. 39. Versuchsfahrt mit der
BMW 51/2 bei 60 km/Std.

und die Streuung als mittlere quadratische Abweichung berechnet nach:

$$\bar{\omega}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\omega_i - \bar{\omega})^2 \quad (2.3/2)$$

(mit N = Zahl der Versuchsfahrten) [22] [23].

Es wird angenommen, daß die Geschwindigkeit bei den Fahrten um ± 5 km/h um den Sollwert geschwankt haben kann, und somit ergibt sich ein rechteckiges Streuungsfeld, in dem der theoretische Wert liegen müßte. Abb. 40, 41 zeigen die Diagramme mit den theoretischen Werten und den Streufeldern.

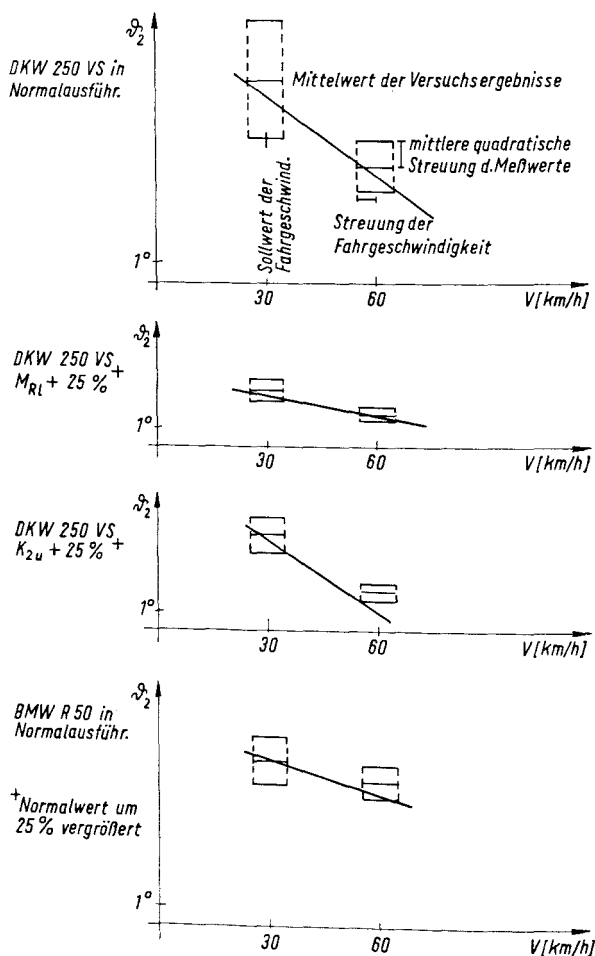


Abb. 40. Die Streufelder der Versuchsergebnisse eingezeichnet in die Diagramme der theoretischen Werte der Hinterradsystemamplituden über der Fahrgeschwindigkeit

Die Frequenzen liegen mit ihren Mittelwerten im allgemeinen etwa 0,25 bis 0,5 Hz tiefer als die errechneten Werte. Die Wirkung des in der Rechnung nicht berücksichtigten Reifenlatsches ist hierfür verantwortlich. Versuche mit hohem Luftdruck und somit kleinerer Latschfläche bestätigen diese Annahme. Bei den Amplituden überdecken die Streuungsfelder zufriedenstellend die theore-

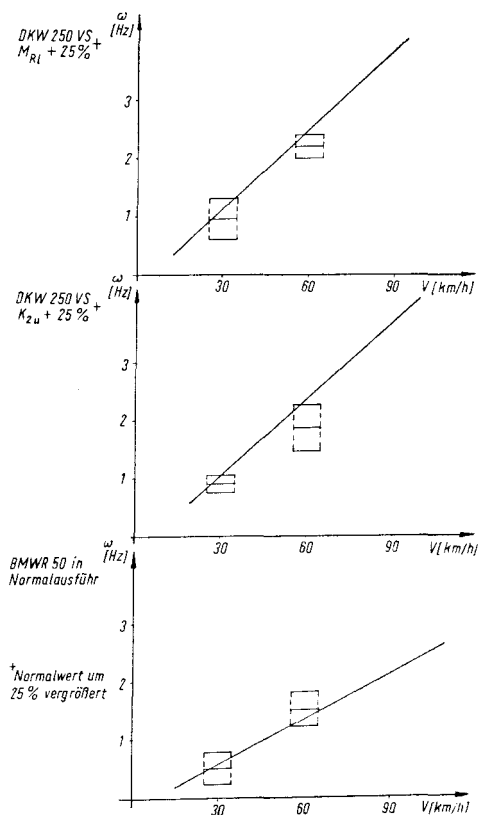


Abb. 41. Meßwertstreuungsfelder eingezeichnet in die Diagramme der theoretischen Frequenzen über der Fahrgeschwindigkeit

tischen Werte der Analogierechenmaschinenaufzeichnung. Ebenfalls ist deutlich der den Ausschlag vergrößernde Anteil der Bewegung bei höheren Geschwindigkeiten zu erkennen.

Bei der Beurteilung der Meßergebnisse müßte grundsätzlich berücksichtigt werden, daß die Streuung hier z. B. im Vergleich zu Prüfstandsversuchen größer sein muß, da es sich um Zweirad-Fahrversuche handelt, bei denen der Fahrer ungewollt noch einen Einfluß auf den Bewegungsablauf ausübt. Im weiteren ist es für den Fahrer bei der akuten Sturzgefahr, ein bis drei Meter

hinter dem Wagen freihändig fahrend, in der Halterung eingeklemmt, schwierig, die notwendigen impulsartigen und bei jeder Variation unterschiedlichen Störkräfte korrekt aufzubringen.

Wenn man diese Schwierigkeiten berücksichtigt, zeigen die Diagramme eine zufriedenstellende Übereinstimmung von Theorie und Fahrversuch.

In einer weiteren zweiten Versuchsgruppe wurde bei der *DKW*-Maschine der Steuerwinkel um $\pm 3^\circ$, der Nachlauf c_1 um $\pm 25\%$ des Normalwertes und das Trägheitsmoment des Vorderradsystems um die Spurlinie um 25% vergrößert. Diese Fahrten wurden ohne Rohrhalterung durchgeführt, um dem Fahrer die Möglichkeit zu geben, sich bei einem eventuellen Sturz leichter von der Maschine zu lösen.

Im Vergleich zu Versuchen mit der Maschine in Normalausführung, ebenfalls ohne Rohrhalterung, lagen hier die Frequenzen in normalen, die Amplituden in größeren, aber vertretbaren Streubereichen und untermauerten somit auch die Brauchbarkeit der aufgestellten Gleichungen. Auffallend ist, daß bei den Fahrten ohne Halterung der aufschaukelnde Anteil der Bewegung bei höheren Geschwindigkeiten nicht so stark hervortritt. Wegen der höheren Winkelgeschwindigkeiten der Seitenneigung knickt der Oberkörper stärker ein und bringt so einen Ausgleich. Die theoretische Instabilität scheint in der Praxis von geringer Bedeutung zu sein.

In einer weiteren Versuchsreihe wurde mit verschiedenen Änderungen an dem *DKW*-Motorrad auf normaler Straße gefahren und auch dort eine Bestätigung der ersten Versuchsfahrten gefunden.

Kennzeichnend ist, daß der Fahrer bei normaler Fahrt praktisch keine Lenkkorrekturen aufbringt. Die Stabilisierung der Geradeausfahrt übernimmt auch hier, wie bei einer Fahrt ohne Lenkerberührung, das Fahrzeug selbst.

Es wurde z. B. durch eingehende Versuche erprobt und durch gleichzeitiges Aufzeichnen von ϑ_2 und ψ gefunden, daß der Fahrer bei höheren Geschwindigkeiten durch Gewichtsverlagerung und Lenkeinschläge lediglich den Bewegungsablauf stört, aber die Stabilisierung der Bewegung nicht beeinflussen kann. Vornehmlich durch eine Lenkbewegung kann er z. B. eine Kurvenfahrt einleiten, aber das Zusammenspiel von Hinterradsystemneigung und Lenkeinschlag muß er der Maschine überlassen. In kritischen Fahrsituationen führt ein krampfhaftes Festhalten des Lenkers meist zum Sturz, während nur ein leichtes Berühren, wobei man das Fahrzeug sich selbst überläßt, die kritische Lage retten kann.

Die Versuche haben somit gezeigt, daß die aufgestellten Bewegungsgleichungen mit ihren Annahmen und Vernachlässigungen geeignet sind, den Bewegungsablauf eines Einspurfahrzeugs praktisch brauchbar darzustellen und das Fahrverhalten rechnerisch zu erfassen. Insbesondere zeigen die Fahrten mit einer Halterung, die eine Bewegung des Fahrers relativ zur Hinterradebene verhindert, eine gewünschte Übereinstimmung mit dem theoretischen Bewegungsablauf.

Aber auch Fahrten ohne diese Halterung und mit normaler Lenkerberührung ergeben vergleichbare Aufzeichnungen, deren wesentliche Größen, Amplitude und Frequenz und der charakteristische Verlauf mit den theore-

tischen Werten in Einklang stehen. Da die Bewegung des Fahrers relativ zum Fahrzeug gleichungsmäßig kaum zu erfassen sein dürfte, muß und, wie die Versuche zeigen, kann die Annahme und Vernachlässigung dieser Tatsache bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen hingenommen werden.

Neben diesen Beobachtungen wurden die in der Einleitung für ein gutes Fahrverhalten gestellten Forderungen auch hier als wesentlich bestätigt gefunden. Bemerkenswert ist, daß sich störende Lenkbewegungen und entsprechende Seitenneigungen mit der errechneten Frequenz auch dann einstellen, wenn theoretisch der Schwingungsanteil der Bewegung schon abgeklungen sein müßte. Den Schwingungen kommt demnach eine besondere Bedeutung zu (siehe auch 3.122).

Schließlich sei noch erwähnt, daß gerade der geübte Fahrer die Bewegungen des Fahrzeugs und seine eigenen Hilfen kaum ohne Registrierung und Filmaufnahmen erfassen kann, so daß man selbst bei einer versuchsmäßigen Beurteilung des Fahrverhaltens einer Maschine auf solche objektive Aussagen nicht verzichten sollte.

3.000 Die rechnerische Ermittlung von Fahrverhalten und Lenkwilligkeit

Mit den aufgestellten Bewegungsgleichungen werden nun die weiteren Untersuchungen rechnerisch durchgeführt. Dabei kann der Bewegungsverlauf mittels des *Routh*-Kriteriums nicht beurteilt werden. Auch lassen, wie oft angenommen wird, die Wurzeln der Frequenzgleichung allein, die Amplitudenverhältnisse oder die absoluten Amplituden noch keine Schlüsse auf das Fahrverhalten zu. Ebenso scheitern Versuche, als Vergleichszahlen die geleistete Dämpfungsarbeit oder einen Mittelwert der Ausschläge heranzuziehen, da sie als nicht kennzeichnend angesehen werden können.

Als charakteristische Größen für die Beurteilung des Fahrverhaltens wurden nach den Fahrversuchen insbesondere erkannt:

1. der Lenkeinschlag $\psi(t)$,
2. die Hinterradsystemseitenneigung $\theta_2(t)$ und
3. das Lenkmoment $M_L(t)$

und es erscheint für die Beurteilung notwendig, jeweils alle drei Größen heranzuziehen. Somit scheidet ein formelmäßiges Erfassen und Beurteilen des Fahrverhaltens völlig aus. Denn schon die Behandlung der Gleichungen für das Stabilitätskriterium hatte nicht mehr abschätzbare Koeffizienten gebracht, so daß ein Durchrechnen mit den allgemeinen Größen zu praktisch unbrauchbaren Ergebnissen führen würde. Aus diesem Grunde muß zur zahlenmäßigen Rechnung übergegangen werden.

Als „Musterbeispiele“ werden eine *DKW 250 VS* und eine *BMW R 51 2* untersucht. („Musterbeispiele“ deshalb, weil bei der ersteren Maschine im weiten Bereich keine Schwingungen auftreten, während bei dem *BMW*-Motorrad der Bewegung fast immer eine Schwingung überlagert ist.) Wie leicht einzusehen, muß auch hier von einer gewissen Kombination der Grundgrößen ausgegangen werden, da die Untersuchung jeder beliebigen Möglichkeit den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

Bei den Berechnungen werden drei Gruppen von Änderungen vorgenommen:

1. Die Art der Störung des Systems (durch verschiedene Anfangsbedingungen oder durch eine Störfunktion).
2. Die Geschwindigkeit (30, 60, 90 km/h).
3. Die Baugrößen (jeweils einzeln um $\pm 12,5\%$ und $\pm 25\%$).

Hierbei wird von dem Gedanken ausgegangen, daß die Änderung jeder Grundabmessung in der konstruktiv möglichen Variationsbreite keinen Aufschluß über die Bedeutung derselben gibt. Nur eine prozentual gleiche Änderung der dimensionslosen Größen spiegelt deren echten Wert auf den Bewegungsablauf wieder.

Mit den angegebenen Berechnungsgrundlagen und elektronischen Rechenmaschinen wird der Einfluß der Änderungen auf ψ , ϑ_2 und M_L in Abhängigkeit von der Zeit ermittelt und ausgewertet.

3.100 Die Ergebnisse der Untersuchungen

3.110 Der Einfluß der verschiedenen Anfangsbedingungen

Es wird angenommen, daß durch die Fahrbahn, durch den Fahrer oder sonstige äußere Einflüsse (Seitenwind) der Bewegungsablauf gestört werden kann, bzw. daß ein Impuls auf Vorder- und Hinterradsystem oder auch nur auf einen Teil gleichgerichtet oder entgegengesetzt wirkt. Dementsprechend wird als Anfangsbedingung

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}_1 &= \text{const}, \\ \dot{\vartheta}_2 &= \text{const} \text{ oder} \\ \pm \vartheta_1, \dot{\vartheta}_2 &= \text{const}\end{aligned}$$

eingesetzt.

Die Möglichkeit, auf eine Differentialgleichung eine Störfunktion zu geben, wird weiter nicht untersucht, da diese Störung im praktischen Fahrbetrieb nicht auftritt.

Einmal beeinflußt die Art der Störung die Richtung des Anfangsaus-schlages. Wirkt diese nämlich auch auf das Vorderradsystem, so schlägt es zuerst in Richtung der Störung aus; erst dann setzt die Zentrifugalkraft durch einen entsprechenden Lenkeinschlag ein, während bei einer Störung nur des Hinterradsystems der für die Stabilisierung richtige Ausschlag sofort eintritt.

Des weiteren können durch verschiedene Anfangsbedingungen die Größen der Amplituden geändert werden, deren Unterschiede hier jedoch vernachlässigbar klein sind.

3.120 Der Einfluß der Geschwindigkeit

3.121 Einfluß auf die Amplituden der zu untersuchenden Größen

Entsprechend der Praxis zeigen auch die theoretischen Untersuchungen, daß ein Einspurfahrzeug mit steigender Geschwindigkeit weniger gegen Störungen empfindlich ist, d. h. bei gleicher Anfangsbedingung werden die Ausschläge kleiner und die notwendigen Lenkmomente größer. Weiterhin ergeben die Aufzeichnungen bei den untersuchten Maschinen ab 20--40 km/h

eine Instabilität der Bewegung, wie auch schon in 1.210 formelmäßig nachgewiesen wird. Der Ausschlag von θ_2 wächst in diesen Fällen schnell bis zu einem gewissen Wert an (der bei den Vergleichen als Maß genommen wird) und steigt stetig langsam weiter, entsprechend einer relativ kleinen positiven Wurzel der charakteristischen Gleichung. Dies weist auf einen großen Koeffizienten des ausschlagvergrößernden Bewegungsanteiles hin. Insbesondere bei höheren Geschwindigkeiten könnte man vor einem weiteren Anstieg ein Verkleinern des Ausschlages erwarten, da neben der nahezu konstanten positiven Wurzel die übrigen, absolut gesehen, um zwei bis drei Zehnerpotenzen kleiner sind.

Der Lenkeinschlag ψ und entsprechend das Lenkmoment M_L gehen in allen Fällen gegen den Nullwert zurück, besonders rasch, wenn der Bewegung keine Schwingung überlagert ist.

3.122 Einfluß auf die Frequenz

Die Frequenz der auftretenden Schwingungen steigt mit der Geschwindigkeit und liegt bei den untersuchten Maschinen zwischen 0 und 3 Hz, erreicht aber in einzelnen Fällen 20–30 Hz.

Bei jedem Fahrzeug und bei allen Fahrgeschwindigkeiten sind, wie die Betrachtung dieses Problems zeigt, stets mehrere Eigenschwingungszahlen für das Schwingungsverhalten des Kraffrades bestimmend (Abb. 42) [24]

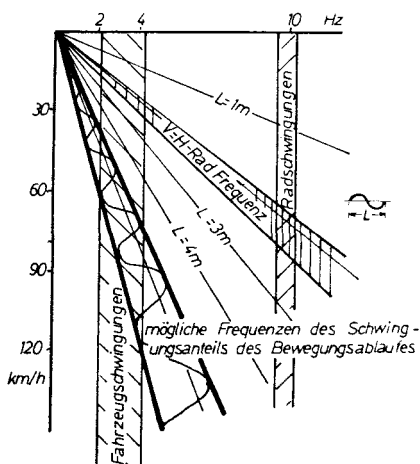


Abb. 42. Resonanzfeld des Kraffrades

So können leicht fahrzeug- und fahrbahnbedingt auftretende Frequenzen in Resonanz mit den Schwingungen der Vorwärtsbewegung kommen bzw. diesen kann z. B. durch Lagerspiel, Übergang von Haft- zu Gleitreibung oder wegen der Phasenverschiebung zwischen Schräglauf und Latschmoment Energie zufließen, die zu großen Ausschlägen und zum Sturz führen können.

Bei den Fahrversuchen war zudem aufgefallen, daß Schwingungen stärker, als man theoretisch erwarten könnte, in Erscheinung traten, und es sind hinreichend Beispiele bekannt, daß Zweiräder bei bestimmten Geschwindigkeiten, Straßenbeschaffenheiten, Belastungen usw. zu Lenkungsschwingungen und Flattererscheinungen neigen.

Aus diesem Grunde sollte man Zweiräder mit Sorgfalt so auslegen, daß der Vorwärtsbewegung keine Querschwingungen überlagert werden.

3.130 Der Einfluß der einzelnen Baugrößen

Während die Auswirkung der verschiedenen Anfangsbedingungen und der Geschwindigkeit als gegeben hingenommen werden müssen, kann der Konstrukteur durch geeignete Wahl der Baugrößen die Amplitudenhöhe beeinflussen und die dem Fahrverhalten abträglichen Schwingungen weitgehend vermeiden. Für diese Untersuchung werden die Baugrößen variiert. Die auftretenden Frequenzen entnimmt man den errechneten Wurzeln der charakteristischen Gleichung; die Größe der Amplituden von ψ und ϑ_2 werden von den Aufzeichnungen des Analogrechners abgegriffen und die Werte über den Änderungen der einzelnen Baugrößen aufgezeichnet. Abb. 43 zeigt die Kurven für die untersuchten Fahrzeuge bei drei Geschwindigkeiten. Neben den Ausschlägen für die Motorräder in Normalausführung (N) werden jeweils nach links/rechts die Ausschläge für eine bis 25%ige Verkleinerung/Vergrößerung ($-N/+N$) der betreffenden Baugröße aufgezeichnet. Die Ordinaten stellen hierbei Amplitudenverhältnisse (Vergrößerungsfaktoren; Verhältnis der tatsächlich erreichten Amplitude zu derjenigen einer unveränderlichen Störung) dar. Bei einer im Fahrbetrieb etwa normalen Störung würden in Abb. 43 einer Ordinate von 8,5 mm eine Seitenneigung ϑ oder ein Lenkeinschlag ψ von etwa 3° entsprechen.

Für beide Maschinen und bei den höheren Geschwindigkeiten zeigen die Aufzeichnungen nahezu gleiche Tendenz des Einflusses und ebenso gleiche Bedeutung dieser Baugröße für den Bewegungsablauf. Die prozentualen Unterschiede der Amplituden bei einer Baugrößenänderung sind mit steigender Geschwindigkeit gleich, d. h. aber, daß bei höheren Geschwindigkeiten sich die Änderung einer Baugröße nicht mehr so stark auswirkt. Differenzen in der Wertigkeit einer Größe sind durch die spezielle Konstruktion der betreffenden Maschinen bestimmt. Bei dem vielfältig verschachtelten Vorgang der Stabilisierung eines Einspurfahrzeugs läßt sich eben nicht ohne weiteres eine allgemeingültige Wertigkeitstabelle angeben. Will man eine vorgegebene Maschine genau auf ihre Fahreigenschaften untersuchen, so bleibt nur die Möglichkeit, mit Hilfe des angegebenen Rechnungsganges die charakteristischen Werte zu überprüfen.

Die durchgeführten Berechnungen lassen jedoch in gewissem Maße in bezug auf Fahreigenschaften eine Einteilung der Baugrößen zu. Wenn man weiterhin berücksichtigt, daß dem Konstrukteur bei der Gestaltung eines Zweirades Grenzen gesetzt sind — die grundsätzliche Anordnung von Rädern, Motor und Fahrer und dadurch bedingte Abmessungen erscheinen für den Normalfall sinnvoll — dann lassen sich mit Sicherheit die Größen angeben,

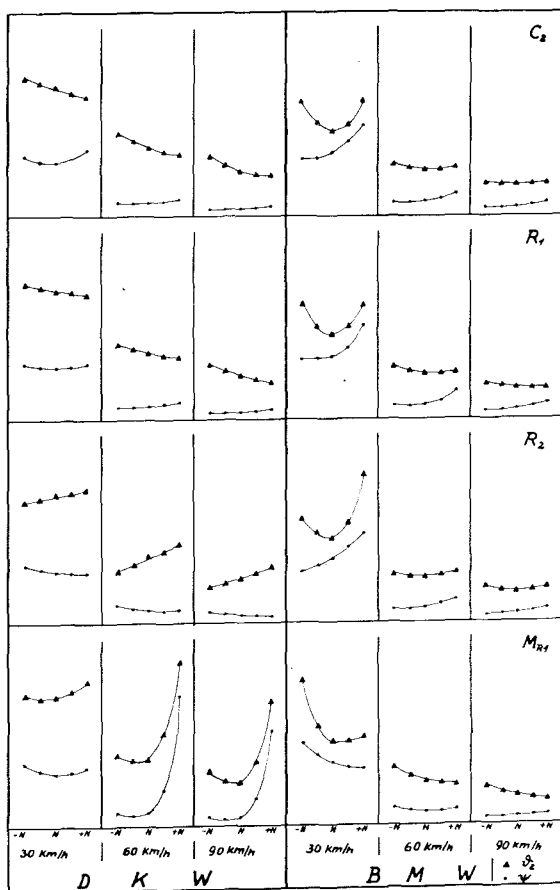


Abb. 43 a.

Massenverhältnis

reduziertes Trägheitsmoment um die U -Achse (V-Rad)reduziertes Trägheitsmoment um die V -Achse (V-Rad)reduziertes Zentrifugalmoment in der UV -Ebene (V-Rad)reduziertes Trägheitsmoment um die U -Achse (H-Rad)reduziertes Trägheitsmoment um die V -Achse (H-Rad)reduziertes Zentrifugalmoment in der UV -Ebene (H-Rad)

reduzierter Abstand des Schwerpunktes von der Steuerachseparallel durch den Aufstandspunkt (Vorderrad)

reduzierter Abstand des Schwerpunktes von der Steuerachseparallel durch den Aufstandspunkt (Hinterrad)

reduzierte Schwerpunkthöhe des Vorderrad-Systems

reduzierte Schwerpunkthöhe des Hinterrad-Systems

 M K_{1u} K_{1v} K_{1uv} K_{2u} K_{2v} K_{2uv} S_1 S_2 H_1 H_2

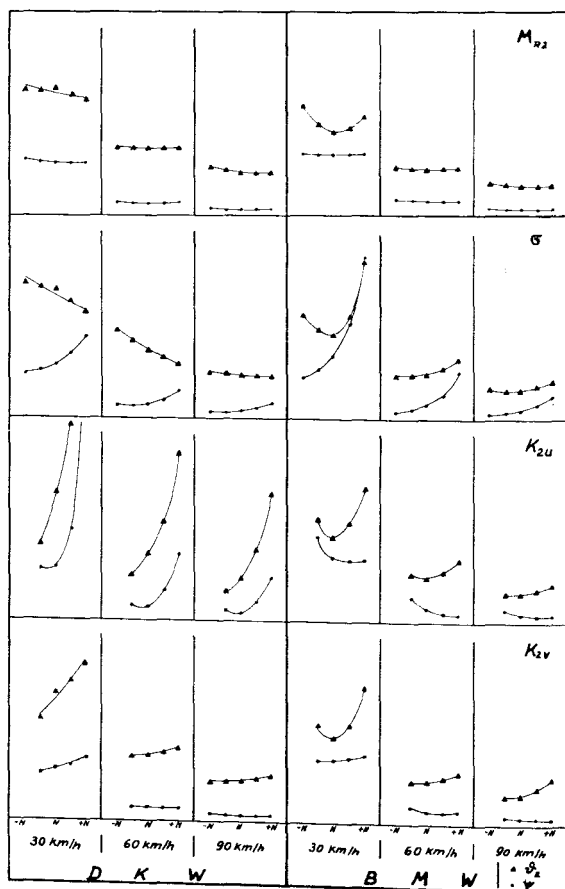


Abb. 43 b.

reduzierter Nachlauf

reduzierter Abstand des Durchstichpunktes der Steuerachse vom hinteren Aufstands-

punkt

reduzierter waagerechter Abstand des Schwerpunktes vom Aufstandspunkt

(Vorderrad)

reduzierter waagerechter Abstand des Schwerpunktes vom Aufstandspunkt

(Hinterrad)

reduzierter Trägheitshalbmesser des Rades

reduzierte Masse des Vorderrades

reduzierte Masse des Hinterrades mit Motor

Steuerwinkel

Hinterradsystemseitenneigung

Lenkeinschlag

C_1

C_2

R_1

R_2

K_R

M_{R1}

M_{R2}

$\Delta \rightarrow \delta_2$

$\cdot \rightarrow \psi$

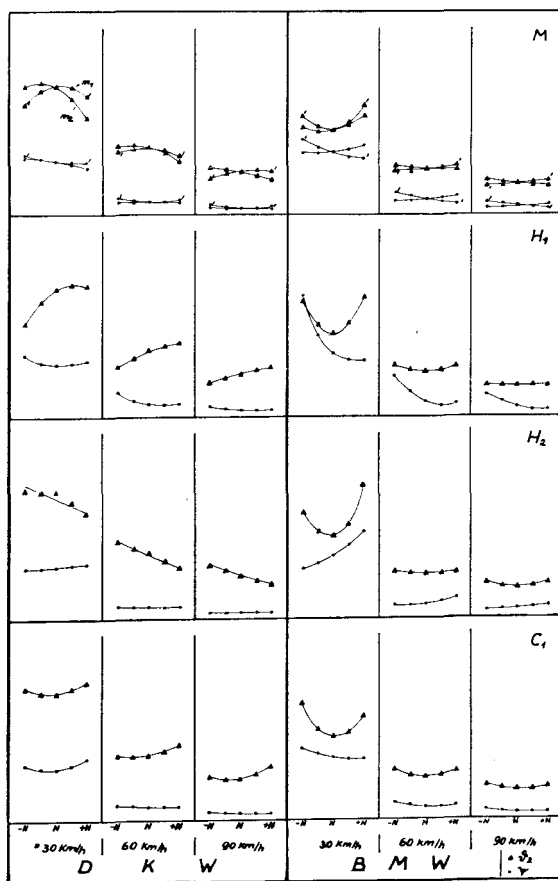


Abb. 43 c. (Legende siehe Seite 48/49)

die nicht nur die Fahreigenschaften hinreichend in gewünschter Weise ändern können, sondern bei denen auch konstruktiv die Möglichkeit dazu gegeben sind.

Zieht man zuerst einmal als ein Maß für die Fahreigenschaften die Amplituden der Winkelausschläge heran und berücksichtigt auch noch die Funktion der Größen bei der Stabilisierung, so lassen sich folgende Wertigkeitsgruppen zusammenfassen:

1. mit geringerem Einfluß $M_{(m1)}, M_{R1}, M_{R2}, H_2, M_{(m2)}$
2. mit mittlerem Einfluß $R_1, H_1, \sigma, C_1, R_2, K_{2v}, C_2$
3. mit größerem Einfluß $K_{1v}, K_{1uv}, K_{1u}, K_{2u}, K_{2uv}$

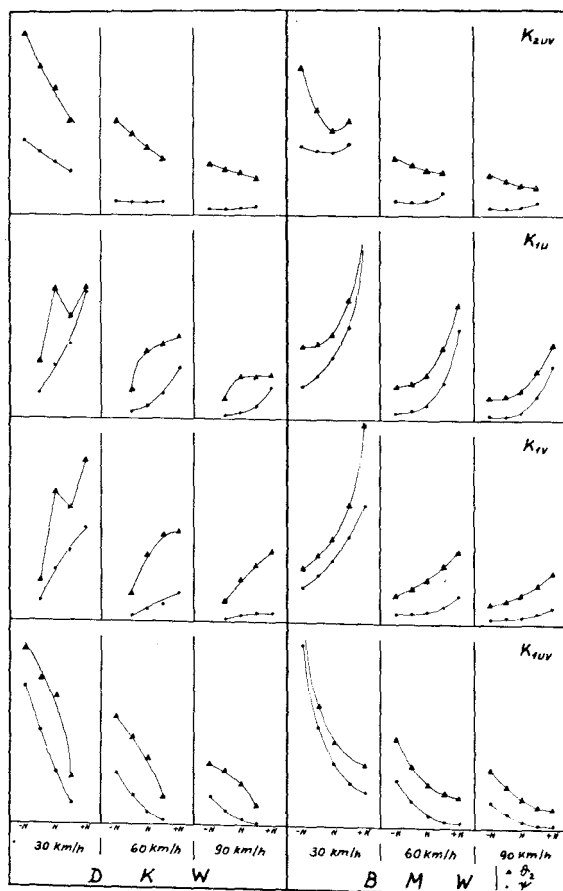


Abb. 43 d. (Legende siehe Seite 48/49)

Hiervon kann man wieder eine Gruppe abspalten, die für die Beeinflussung des Fahrverhaltens aus konstruktiven Gründen nur sehr bedingt herangezogen werden kann: nämlich diejenige, die das Hinterradsystem beschreibt. Der Radstand c_2 ist praktisch vorgegeben, eine Vergrößerung bringt auch nur geringe Vorteile. Ein Einfluß des Hinterrades und somit der des Motorumlaufrinnes ist praktisch nicht gegeben. Die Belastungsmöglichkeit bis zum Eigengewicht des Systems ergibt wegen der dadurch bedingten Änderung des Trägheitsmomentes um die Spurlinie und des Massenverhältnisses immer eine Verschlechterung, die auch durch die Belastung bedingten Änderungen anderer Größen nicht ausgeglichen werden kann. Die Beeinflussung ist wegen der

großen Variationsbreite so unterschiedlich, daß von seiten des Hinterradsystems keine Ausrichtung der Fahreigenschaften einer Maschine zu erzielen ist.

Es muß vielmehr versucht werden, dem Fahrzeug mit den von der Zuladung unabhängigen Konstruktionsdaten eine solche Sicherheit in bezug auf Fahrverhalten mitzugeben, daß die möglichen und üblichen Veränderungen am Hinterradsystem diese nicht mehr als erträglich verschlechtern.

Hierfür bietet sich das Vorderradsystem an; dabei spielt jedoch in geringerem Ausmaß das Massenverhältnis und das Trägheitsmoment des Vorderrades selbst eine Rolle. Wie schon formelmäßig gezeigt, liegt deren Wert nicht sehr in der Größe der Wirkung, sondern mehr im grundsätzlichen Vorhandensein. Wenn auch ihr Einfluß gering ist, so ist er dennoch für den Bewegungsablauf nicht unwesentlich und darf keineswegs vernachlässigt werden.

Bedeutend stärker beeinflussen die Trägheitsmomente des Vorderradsystems das Fahrverhalten. Einmal sollte die Massenverteilung ungefähr symmetrisch zur Steuerachse liegen, d. h. die große Achse der Trägheitsellipse sollte in etwa mit dieser zusammenfallen. Zum anderen können im besonderen durch größere Trägheitsmomente um die Steuerachse die Schwingungen vermieden werden. In dieser Tatsache liegt unter anderem der Vorteil der (Lang-)Schwinge gegenüber der Telegabel, daß nämlich erstere nach einer Störung ohne Schwingungen auf den Anfangswert zurückschlägt, während eine Gabel, deren Massen um die Achse konzentriert liegen, leicht zu Schwingungen neigt.

Die Fahreigenschaften eines Motorrades mit einer Schwinge werden jedoch durch Änderungen von Steuerwinkel, Nachlauf und ihrer Trägheitsmomente, wie sie beim Einfedern immer auftreten (z. B. σ etwa um $\pm 3^\circ$, c_1 um ± 6 cm!), etwas stärker beeinflusst werden als bei Anordnung mit Telegabeln. Rechnerisch müßte ein Kompromiß zu finden sein, der die Vorteile beider Bauarten bestmöglich ausnutzt.

Den weiteren Grundgrößen, Schwerpunktlage, Steuerwinkel und Nachlauf dürfte in der Hauptsache nur die Rolle einer konstruktiv leicht darzustellenden *Feinregulierung* zukommen. Die letztgenannten Variablen sind also keineswegs die bedeutendsten, wie man immer wieder lesen kann, jedoch geben sie, konstruktiv gesehen, die einfachste Möglichkeit, die Eigenschaften einer einmal ausgelegten Konstruktion experimentell zu verändern.

Ferner sei darauf hingewiesen, daß durch größere Veränderung einer Baugröße, vornehmlich der des Vorderradsystems, plötzlich eine unverhältnismäßig starke Verschlechterung der Fahreigenschaften eintreten kann. Dies ist der Fall, wenn die Stabilisierung „übersteuert“ wird. Schlägt z. B. das Vorderrad durch Vergrößern seines Trägheitsmomentes zu stark zur Seite ein, so daß das Hinterradsystem durch die Fliehkräfte schneller zur anderen Seite überschlägt als das Vorderrad nachkommen kann, so treten schnell ungewöhnlich große Amplituden auf.

Die Untersuchung der Lenkmomente ergibt schließlich, daß diese im allgemeinen nur geringfügig beeinflusst werden, naturgemäß am stärksten bei Änderungen der Trägheitsmomente des Vorderradsystems. Dabei werden

neben einer Verbesserung der Fahreigenschaften durch kleinere Winkelausschläge die Lenkmomente, wenn auch nur geringfügig, so doch wie erwünscht, vergrößert.

4.000 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Theorie und Berechnungsmöglichkeiten aufgezeichnet, die das Fahrverhalten eines Einspurfahrzeugs erfassen. An Hand der Gleichungen werden die physikalischen Vorgänge bei der Stabilisierung des Fahrzeugs erklärt, der Einfluß der Geschwindigkeit und die verschiedenen Möglichkeiten des Bewegungsablaufes ermittelt. Es wird Wert darauf gelegt, daß jemand, der mit dem Problem nicht vertraut ist, ohne Zuhilfenahme weiterer Literatur eine Berechnung durchführen könnte, im besonderen, wenn, wie im vorliegenden Fall, elektronische Rechenmaschinen zur Verfügung stehen. Durch eingehende Fahrversuche wurde die Brauchbarkeit der aufgestellten Bewegungsgleichungen nachgewiesen. Als entscheidende Kriterien für gutes Fahrverhalten sind die Winkelausschläge und die Möglichkeit des Lenkungsflatterns, besonders bei Fahrzeugen, deren Bewegungsablauf eine Schwingung überlagert ist, anzusehen. Der Einfluß des Fahrers stellte sich als geringer heraus, als man annehmen könnte.

Um zu konkreten Ergebnissen zu gelangen, wurden zwei Maschinen mit verschiedenen Gabelbauarten rechnerisch untersucht und unter anderem mit Hilfe dieser Ergebnisse der Einfluß der Baugrößen auf das Fahrverhalten bestimmt. So konnten die Grundgrößen ermittelt werden, die nicht nur die Fahreigenschaften hinreichend in gewünschter Weise ändern können, sondern bei denen auch konstruktiv die Möglichkeit dazu gegeben ist. Diese sind nicht Steuerwinkel, Nachlauf und Schwerpunktlage, denen in der Hauptsache die Rolle einer leicht darzustellenden Feinregulierung zukommt, sondern vielmehr die Trägheitsmomente des Vorderradsystems. Diese, richtig gewählt, können nicht nur die Fahreigenschaften günstig beeinflussen, sondern ebenfalls jegliche Schwingungen im Bewegungsablauf unterbinden.

Die Berechnung hat weiterhin ergeben, daß durch Variation der Baugrößen das Lenkmoment nur unwesentlich geändert werden kann. Die erwünschten größeren Lenkkräfte können somit nur durch Verkürzen des Hebelarms, d. h. des Lenkers, erreicht werden.

Wenn heute noch oftmals bezweifelt wird, daß sich der ziemlich große Zeitaufwand für die theoretisch-rechnerische Untersuchung des Fahrverhaltens von Einspurfahrzeugen lohnt und daß aus den Ergebnissen praktisch verwertbare Folgerungen gezogen werden können, so kann diesem Zweifel nunmehr begegnet werden. Als Beispiel sei angeführt, daß man heute in vielen Fällen nicht die an sich bessere Schwingengabel zugunsten der Teleskopgabel aufgeben müßte, wenn man bei Kenntnis der Theorie einige Berechnungsarbeit aufwenden würde. Allerdings soll eingestanden werden, daß es auch hier nicht gelungen ist, die Theorie derart zur Gebrauchsanweisung auszubauen, wie bei anderen Zweigen des Maschinenwesens, besonders des Elektromaschinenbaues, wo man vielleicht aus diesem Grund nicht ohne Anwendung der Theorie konstruieren würde.

Verzeichnis der Formelzeichen

c_1, c_2	Abstand des Durchstichpunktes der Steuerachse durch die Fahrbahn vom Aufstandspunkt des Vorderrades (Nachlauf) bzw. des Hinterrades
$Fr = v/\sqrt{l \cdot g}$	Froudezahl
$f = 1/Fr$	reziproke Froude'sche Zahl
g	Fallbeschleunigung
h	Angriffshöhe der Reaktionskraft Y
h_1, h_2	Abstand des Vorderradsystem- bzw. Hinterradsystem-Schwerpunktes von der Spurlinie
J_1, J_2	Massenträgheitsmoment des Vorder- bzw. Hinterradsystems
$J_{1(2) u, v, uv}$	Trägheitsmoment des Vorder(Hinter)radsystems um die entsprechenden Achsen
k	Trägheitsarm
$l = c_2 - c_1$	Radstand
m_1, m_2	Masse des Vorder- bzw. Hinterradsystems
m_{1R}, m_{2R}	reduzierte Masse des Vorder- bzw. des Hinterrades mit Motor
N_1, N_2	Drall des Vorder- bzw. Hinterrades
r	waagerechter Abstand zwischen dem Angriffspunkt von Y und der Lotrechten durch den Aufstandspunkt des Vorderrades
r_1, r_2	Abstand des Schwerpunkt-Fußpunktes auf der Spurlinie vom Aufstandspunkt für das Vorder- bzw. Hinterrad
R_{dyn}	Arbeitshalbmesser des Vorder- und des Hinterrades
s_1, s_2	Abstand des Vorder- bzw. Hinterradschwerpunktes von der Parallelen zur Steuerachse durch den zugehörigen Aufstandspunkt
t	Zeit
U, V, W	raumfeste Koordinaten
v	Fahrgeschwindigkeit
x, y, z	körperfeste Koordinaten
Y	in der Lotrechten (y -Richtung) wirkende Reaktionskraft auf die Steuerachse
Y_1, Y_2	im Aufstandspunkt des Vorder- bzw. Hinterrades in lotrechter Richtung wirkende Reaktionskraft
Z	senkrecht zur Radebene in der Steuerachse wirkende Reaktionskraft
θ_1, θ_2	Neigungswinkel der Vorder- bzw. Hinterradebene gegen die Lotrechte (Schräglagenwinkel)
λ	Frequenzparameter
σ	Steuerwinkel
$\tau = \frac{v}{l} \cdot t$	reduzierte Zeit
φ_1, φ_2	Winkel der Vorder- bzw. Hinterradebene gegen die mittlere Fahrtrichtungsebene
$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$	Winkel zwischen Vorder- und Hinterradebene (Lenkungswinkel)
ω	Winkelgeschwindigkeit des Rades
$\Omega = \frac{\lambda \cdot l}{v}$	reduzierte Frequenz mit den Wurzeln Ω_1 bis Ω_4
$\Theta_{1,2}$	reduzierter Neigungswinkel des Vorder- bzw. Hinterradsystems
$M = m_1/m_2$	Massenverhältnis
$K_1 u, v, uv = \frac{k_1 u, v, uv}{l}$	Trägheitsverhältnisse
$K_2 u, v, uv = \frac{k_2 u, v, uv}{l}$	

$$\left. \begin{aligned} M_{R1} &= \frac{m_{R1}}{m_2} \\ M_{R2} &= \frac{m_{R2}}{m_2} \end{aligned} \right\} \text{Kreiselmassenverhältnis}$$

$$\left. \begin{aligned} H_{1,2} &= \frac{h_{1,2}}{l} \\ C_{1,2} &= \frac{c_{1,2}}{l} \\ R_{1,2} &= \frac{r_{1,2}}{l} \\ S_{1,2} &= \frac{s_{1,2}}{l} \end{aligned} \right\} \text{Längenverhältnisse}$$

$$K_R = \frac{k_R}{\sqrt{l \cdot R_{\text{dyn}}}} \text{Kreiselträgheitsverhältnisse}$$

Die nur in einzelnen Abschnitten benutzten Bezeichnungen sind dort erläutert.

Literatur

- [1] *Rankine*: On The Dynamical Principles Of The Motion Of Velocipeds. Engineer Vol. XXVIII 2. Hälfte 1869 London Seite 79/129/153/175. [T. H. Stuttgart 2° 1065 XIX*].
- [2] *Bourelot*: Nouveau Traité des Bicycles et Bicyclettes Encyclopédie Scientifique des Aide-Mémoire 1898 Paris. [T. H. Aachen 1/2 Fe 131].
- [3] *McCaw*: Engineer Dez. 1898 London.
- [4] *Whipple*: The Stability Of The Motion Of A Bicycle The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. XXX 1899 London, Seite 312. [Uni Göttingen 8° Mathematik I 1040].
- [5] *Carvollo*: Journal De L'Ecole Polytechnique. 2. Serie, 6. Heft 1901. Paris [T. H. Hannover Zs 660].
- [6] *Klein und Sommerfeld*: Die Stabilität des Fahrrades. Über die Theorie des Kreisels, Bd. IV Technische Anwendung 1897–1910 Leipzig, Seite 863. [SU Göttingen Phys II 2132].
- [7] *Bower*: Steering and Stability Of Single Track Vehicles. Automobil Engineer (Proceedings) Vol. 5, 1915, London, Seite 280. [T. H. München III 1143].
- [8] *Pearsall*: The Stability Of A Bicycle Automobil Engineer (Proceedings). Vol. XVII 1922/23 London, Seite 395. [T. H. Hannover Zs 4542].
- [9] *Wilson-Jones*: Steering And Stability Of Single-Track Vehicles. Automobil Engineer (Proceedings). 1951/52 London, Seite 191. [T. H. Braunschweig Ja 144].
- [10] *Döhring*: Die Stabilität von Einspurfahrzeugen. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens.
- [11] *Döhring*: 21. Band, Heft 2, 1955, S. 50. ATZ 1954, Stuttgart, Seite 68/72.
- [12] *Döhring*: Lenkungsflattern von Einspurfahrzeugen. ATZ 1956, Stuttgart, Seite 282.
- [13] *Mühlfeld*: Die Lenkung des Kraftrades. ATZ 1951, Stuttgart, Seite 249.
- [14] *Froede*: Zweiradfahrzeuge. VDI-Berichte, Bd. 16, 1956, Düsseldorf.
- [15] *Grammel*: Der Kreisel. Band I und II, 1950, Springer/Berlin, Göttingen, Heidelberg.
- [16] *Zurmühl*: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker 1957, Springer/Berlin, Göttingen, Heidelberg.
- [17] *Rothe*: Höhere Mathematik. Teil III, 1953, Teuber/Stuttgart.
- [18] *Pöschl*: Elementare Festigkeitslehre. 1952, Springer/Berlin, Göttingen, Heidelberg.
- [19] *Klotter*: Technische Schwingungslehre. 1951, Springer/Berlin, Göttingen, Heidelberg.
- [20] *Bussien*: Automobiltechnisches Handbuch. 1931/1945 Technischer Verlag Cram, Berlin.
- [21] *Mühlfeld*: Ein hochfrequenztechnisches Verfahren zur Messung der dynamischen Radlast. ATZ 1953, Stuttgart, Seite 147.
- [22] *Linder*: Planen und Auswerten von Versuchen. 1953 Verlag Birkhauser, Basel, Stuttgart.
- [23] *Lindner*: Statistische Methoden. 1957, Verlag Birkhauser, Basel, Stuttgart.
- [24] *Marquard*: Über das Schwingungsverhalten des Kraftrades. ATZ 1952, Stuttgart, Seite 269.
- [25] *v. Zelewski*: Einfluß von Steuerwinkel und Nachlauf auf den Dämpfungsfaktor (nicht veröffentlicht) 1950.

*) vorhanden in der Bibliothek: